Probewettbewerb 2017 - Lösungshinweise

Mathématiques sans Frontières

Aufgabe 1 – Positive und negative Produkte – 7 Punkte

Paul gewinnt, wenn das Produkt der beiden gezogenen Zahlen positiv ist. Das ist der Fall, wenn entweder beide Zahlen positiv oder beide Zahlen negativ sind.
Bei sechs Karten, drei mit positiven und drei mit negativen Zahlen, beträgt Pauls Gewinnwahrscheinlichkeit

$$2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Bei fünf Karten, drei mit positiven und zwei mit negativen Zahlen, beträgt Pauls Gewinnwahrscheinlichkeit

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}.$$

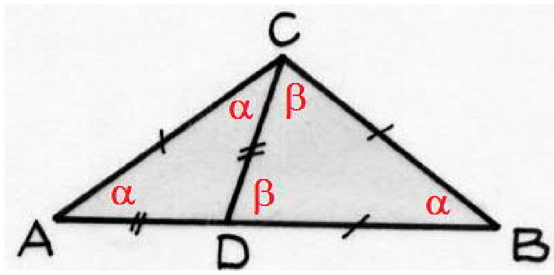
Paul hat nicht Recht. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit ändert sich durch das Entfernen der Karte nicht.

Aufgabe 2 – Goldig – 5 Punkte

Mit den Bezeichnungen in der nebenstehenden Figur gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck

$\alpha + 2\beta = 180°$ (Dreieck DBC)
$3\alpha + \beta = 180°$ (Dreieck ABC)

und somit $\boldsymbol{\alpha} = 36°$ und $\boldsymbol{\beta} = 72°$



Bemerkung:
Die Dreiecke ABC, DBC und ADC sind goldene Dreiecke, das heißt, dass die Längen von Grundseite und Schenkeln im Verhältnis des goldenen Schnitts stehen.
Beim Dreieck DBC gilt: Wenn man die Länge der Basis durch die Länge eines Schenkels teilt, ergibt sich
$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Bei den Dreiecken ABC und ADC gilt: Wenn man die Länge eines Schenkels durch die Länge der Basis teilt, ergibt sich
$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Aufgabe 3 – Würfeln? Rollen! – 7 Punkte

6	5	1	2
3			
1			
4			
Summe 22			
		2	4
	3	6	
1	5		
4			
Summe 25			
	6	3	1
	2		
	1		
4	5		
Summe 22			
			1
			2
	1	3	6
4	5		
Summe 22			

	6	4	1
3	5		
1			
4			
Summe 24			
			2
	3	6	4
1	5		
4			
Summe 25			
		6	5
	2	3	
	1		
4	5		
Summe 26			
		6	2
		4	
		1	
4	5	3	
Summe 25			

5

		6	2
3	5	4	
1			
4			
Summe 25			
		1	2
		3	
1	5	6	
4			
Summe 22			
			6
	2	3	5
	1		
4	5		
Summe 26			
			6
		4	2
		1	
4	5	3	
Summe 25			

			6
3	5	4	2
1			
4			
Summe 25			
			1
		3	2
1	5	6	
4			
Summe 22			
		4	6
		2	
	1	3	
4	5		
Summe 25			
			5
			4
		1	2
4	5	3	
Summe 24			

	2	6	5
	3		
1	5		
4			
Summe 26			
			5
			3
1	5	6	2
4			
Summe 26			
			4
		2	6
	1	3	
4	5		
Summe 25			
			6
			5
			1
4	5	3	2
Summe 26			

Fünf Wege ergeben 22 Punkte, zwei Wege ergeben 24 Punkte, acht Wege ergeben 25 Punkte und fünf Wege ergeben 26 Punkte. Die kleinstmögliche Summe beträgt 22, die größtmögliche 26 Punkte.

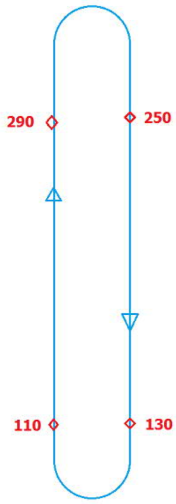
Aufgabe 4 – Alles in Ordnung – 5 Punkte

Die beiden Lösungen können durch Ausprobieren gefunden werden oder durch ein rückwärtiges Vorgehen vom gewünschten Ergebnis 123450 her. (Das leere Feld wird mit 0 bezeichnet.)

Bemerkung: Beim ersten Zug können die Steine 3, 4 und 5 dabei nicht auf das leere rechte Feld gesetzt werden, weil man mit ihnen sonst zweimal ziehen müsste.
Es bleiben die folgenden beiden Möglichkeiten:

	123450		123450
	023451		103452
	320451		143052
	325401		043152
	305421		340152
Die Lösungen sind also	345021	und	345102

Aufgabe 5 – Sessellift – 7 Punkte



Oskar und seine Schwester fahren in den Sesseln 110 und 290 nach oben, die Sessel 130 und 250, die sich ihnen jeweils gegenüber befinden, fahren nach unten.
Mit Hilfe einer Skizze ist leicht zu erkennen, dass sich der Sessel 1 zwischen Oskar und seiner Schwester befinden muss. Zwischen der 250 und der 130 befinden sich 119 Sessel, daher müssen sich auch 119 Sessel zwischen der 290 und der 110 befinden, 10 mehr als die 109 Sessel von der 1 bis zur 109.
Der Sessellift hat 290 + 10 = 300 Sitze.

Aufgabe 6 – Astrids Safe – 5 Punkte

Da $D \cdot D = I$ gilt, ist I eine einstellige Quadratzahl, also 4 oder 9.
(1 scheidet aus, weil sonst D = I gelten würde.)

- ✓ Wenn I = 9 gelten würde, wäre D = 3 und T = 27, denn T : D = I. Das ist aber nicht möglich, weil alle Ziffern kleiner oder gleich 9 sind.
- ✓ Also gilt I = 4, D = 2 und T = 8.

Aus A + S = 8 und A – S = 2 folgt 2A = 10 und A = 5. Somit ist S = 3.
Aus R + I = A folgt schließlich R = 1.
Der Code ist 538142.

Aufgabe 7 – Vorsicht: Trolle – 7 Punkte

Zunächst muss die Anzahl der Trolle in jeder Höhle bestimmt werden.
In jeder Reihe befinden sich 24 Trolle, davon 11 in Höhle C und keiner in Höhle B. Also befinden sich 13 Trolle in Höhle A.
Die Lösung kann durch Probieren oder systematisch mit Hilfe eines Gleichungssystems gefunden werden,
z. Bsp.: I D + G = 11
II E + H = 24
III F + I = 13
IV E + I = 11
V G + E = 13
VI D + E + F = 24
VII G + H + I = 24.

Aus III und IV folgt F = E + 2.
V liefert G = 13 – E. Einsetzen in I ergibt D + 13 – E = 11 und D = E - 2.
Einsetzen von F = E + 2 und D = E – 2 in VI liefert E – 2 + E + E + 2 = 24 und E = 8.
Also gilt F = 10 und D = 6.
Mit den obigen Gleichungen erhält man weiterhin G = 5, H = 16 und I = 3.
Da nur 20 Portionen Zaubertrank zur Verfügung stehen, muss der Weg BEDG gewählt werden.

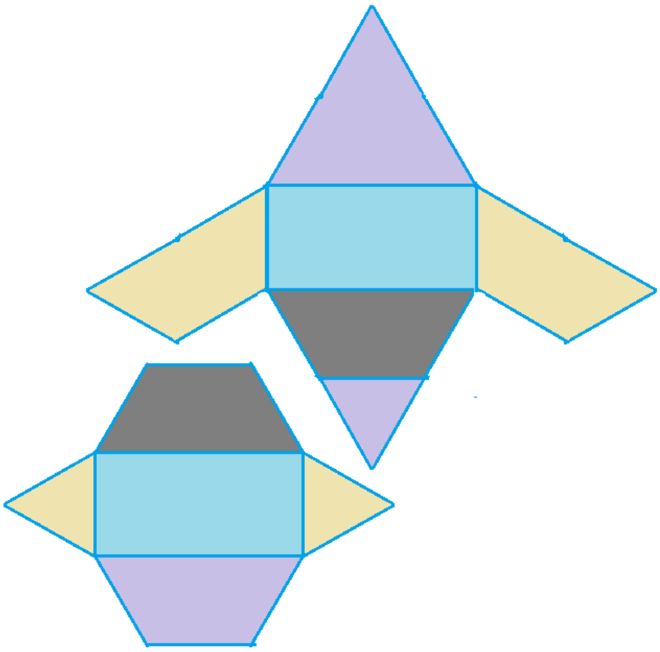
Aufgabe 8 – Ameisenbrücke – 5 Punkte

Die Ameise kann auf die sich absenkende Plattform krabbeln, wenn sie 9 cm in genau derselben Zeit zurücklegt, in der die Plattform sich um 6 cm absenkt. Ameise und Plattform bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Bei jedem Zentimeter, um den sich die Plattform absenkt, muss die Ameise also $\frac{9}{6}$ cm zurücklegen, damit sie die Plattform rechtzeitig erreicht.

Die Ameise kann die Plattform wieder verlassen, wenn sie 4,8 cm in genau derselben Zeit zurücklegt, in der die Plattform sich um die restlichen 3,2 cm absenkt. Bei jedem Zentimeter, um den sich die Plattform absenkt, muss die Ameise also $\frac{4{,}8}{3{,}2}$ cm zurücklegen, damit sie die Plattform rechtzeitig wieder verlassen kann.
Es gilt $\frac{4{,}8}{3{,}2} = \frac{9}{6} = 1{,}5$. Wenn die Ameise pro Zentimeter, den die Plattform zurücklegt, genau 1,5 cm zurücklegt, kann sie auf die Plattform krabbeln und diese wieder verlassen.
Die Ameise kann vom oberen auf das untere Brett krabbeln.

Aufgabe 9 – Pyramidenteile – 7 Punkte

Hier zwei mögliche Netze:



Aufgabe 10 – Eine Aufgabe aus Japan – 10 Punkte

Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 3 LE: $A = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{3}$ FE.

Höhe h des Dreiecks ABC: $h = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$ LE.

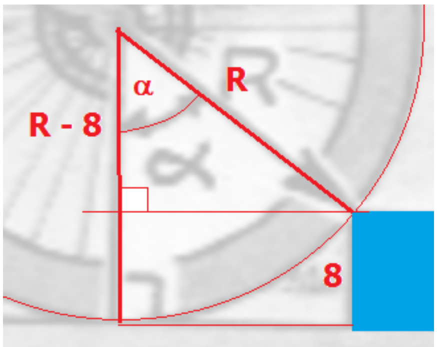
Sei M der Mittelpunkt der Strecke BC. Im rechtwinkligen Dreieck DMA gilt mit Pythagoras

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\ \text{LE} = \sqrt{7}\ \text{LE}.$$

Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ADE mit der Seitenlänge $\sqrt{7}$ LE: $A = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{3}$ FE.
Die beiden Dreiecksflächen stehen also im Verhältnis 9 : 7.

Die Aufgabe kann auch anschaulich über die Flächen gelöst werden:
Eine Flächeneinheit sei die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1.
Das Dreieck ABC hat die Fläche 9 FE. Da die Dreiecke ABD und ACE kongruent und daher flächengleich sind, ist die Fläche des Dreiecks ABC so groß wie die Fläche des Vierecks ADCE.
Die Fläche des Dreiecks ADE erhält man, wenn man von der Fläche des Vierecks ADCE (9 FE) die Fläche des Dreiecks DCE abzieht. Die Fläche des Dreiecks DCE beträgt 2 FE, was man leicht einsieht, wenn man das Dreieck zu einem Parallelogramm der Fläche 4 FE ergänzt.
Die Fläche des Dreiecks ADE beträgt also 7 FE, und die Dreiecksflächen stehen im Verhältnis 9 : 7.

Klasse 10



Aufgabe 11 – Auf großem Reifen – 5 Punkte

Mit cos (α)= (R-8): R ergibt sich:

R (in Zoll)	13	13,75	14,5
α (in Grad)	67,38	65,28	63,37

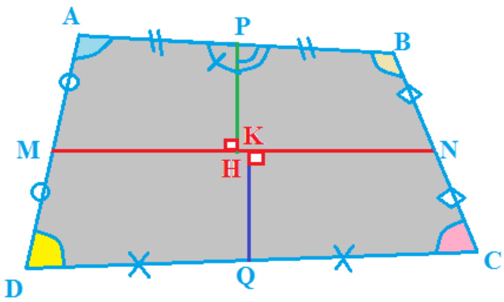
Bei einem größeren Reifendurchmesser wird der Winkel α kleiner und somit auch die Kraft, die der Fahrer zur Überwindung des Hindernisses aufwenden muss.

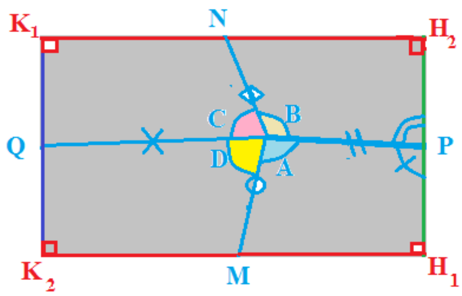
Aufgabe 12 – Spiegelbrüche – 7 Punkte

$$\frac{12}{5}=\frac{9}{5}+\frac{3}{5}=\frac{93}{55}+\frac{39}{55}=\frac{132}{55}=\frac{12}{5}$$

$$\frac{10a+b}{11c}+\frac{10b+a}{11c}=\frac{11a+11b}{11c}=\frac{11(a+b)}{11c}=\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

Aufgabe 13 – Vierecksflächen – 10 Punkte





Da P der Mittelpunkt der Strecke AB ist, gilt $\overline{PA}=\overline{PB}$, und man kann die beiden Strecken genau aneinander legen. Die beiden Nebenwinkel bei P liegen in der neu zusammengesetzten Figur wieder nebeneinander. Die Punkte H_1, P und H_2 liegen also auf einer Strecke.
Dieselbe Argumentation gilt für die Strecken MA und MD, QD und QC, NB und NC sowie für die Nebenwinkel bei M, Q und N.
Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, liegen die vier Innenwinkel des Ausgangsvierecks im Inneren der neu zusammengesetzten Figur ohne Zwischenraum oder Überlappung aneinander. Die neu entstandene Figur ist also ein Viereck, und da die vier rechten Winkel bei H bzw. K die Innenwinkel dieses Vierecks bilden, handelt es sich um ein Rechteck.

Die Breite b des Rechtecks misst b = 2 $\overline{PH}$ = 2 $\overline{QK}$.
Die Länge a des Rechtecks misst a = $\overline{MK}+\overline{MH}=\overline{NK}+\overline{NH}$, und es ist

$$2a = \overline{MK}+\overline{MH}+\overline{NK}+\overline{NH} = \overline{MK}+\overline{NK}+\overline{MH}+\overline{NH} = \overline{MN} + \overline{MN} = 2\,\overline{MN}.$$

Die Länge a des Rechtecks misst also $\overline{MN}$, und die Fläche A des Rechtecks erhält man mit A = $\overline{MN}\cdot 2\,\overline{PH}$.

Zur Berechnung der Vierecksfläche A kann man die Länge der Strecken MN und PH messen.
Dann gilt A = 2 $\boldsymbol{\overline{MN}}\cdot\boldsymbol{\overline{PH}}$

Mathématiques Sans Frontières