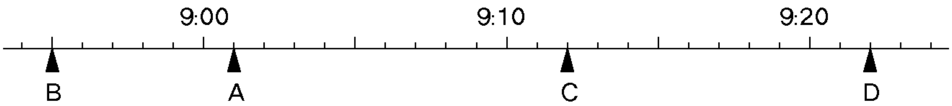
Mathematik ohne Grenzen- Probewettbewerb 2016
Lösungshinweise

Aufgabe 1 – *Fliegende Blätter* – 7 Punkte

Zwischen S. 26 und S. 91 liegen 64 Seiten (S. 27-90) , also **16 Blätter**, da auf jedem Blatt 4 Seiten sind.
Unter der Seite 26 (deren Rückseite S. 25 ist) liegen die Seiten 24 bis 1, also 24 Seiten.
Unter der Seite 91 (deren Rückseite S. 92 ist) befinden sich daher auch 24 Seiten.
Insgesamt hat die Zeitschrift also **116 Seiten** (92 + 24).

Aufgabe 2 – *Bei Anruf Gewinn* – 5 Punkte



Zwischen dem Anruf von Elias und den Anrufen seiner Freunde liegen 3, 7, 14 und 20 Minuten.
Da zwischen den Anrufen von Ben und Dennis 27 Minuten liegen, muss Elias‘ Anruf zwischen diesen beiden Anrufen gewesen sein. Mit den vorgegebenen Abständen hat Elias also entweder 7 Minuten nach Ben (und 20 Minuten vor Dennis) um 9.02 Uhr angerufen oder 20 Minuten nach Ben (und 7 Minuten vor Dennis) um 9.15 Uhr. Da keiner der Anrufe 3 Minuten von 9.02 Uhr entfernt ist, hat Elias um **9.15 Uhr** angerufen, 20 Minuten nach Ben, 14 nach Achmed, 3 nach Charlotte und 7 vor Dennis.

Aufgabe 3 – *Es zählt das Produkt!* – 7 Punkte

Falls die Darstellung einen Summanden n enthält, der größer ist als 4, sollte man ihn durch $3 + (n - 3)$ ersetzen, denn für $n > 4{,}5$ gilt: $3 \cdot (n - 3) > n$.
Wenn die Darstellung drei Mal den Summanden 2 enthält, sollte man „2 + 2 + 2“ durch „3 + 3“ ersetzen, denn $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$.
Und natürlich sollte die Darstellung keine 1 enthalten.

Das größte Produkt ergibt sich daher für die Darstellungen
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 22$ oder **$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 22$:**
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 2\,916$

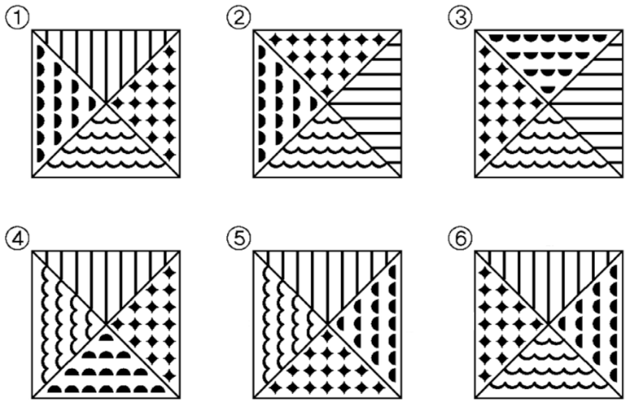
Aufgabe 4 – *Fliegende Crêpes* – 5 Punkte

Die Crêpes werden der Größe nach mit den Zahlen von 1 bis 6 bezeichnet; Crêpe 1 ist der größte, Crêpe 6 der kleinste.
Die Tabelle stellt eine mögliche Lösung dar.
Die linke Spalte der Tabelle zeigt die Lage der Crêpes zu Beginn, die anderen Spalten die Lage der Crêpes nach der ersten, zweiten, dritten und vierten Umdrehung.
Der fett gedruckte Strich zeigt an, wo William den Pfannenheber ansetzt.
William braucht mindestens 4 Umdrehungen, um die Crêpes zu ordnen.

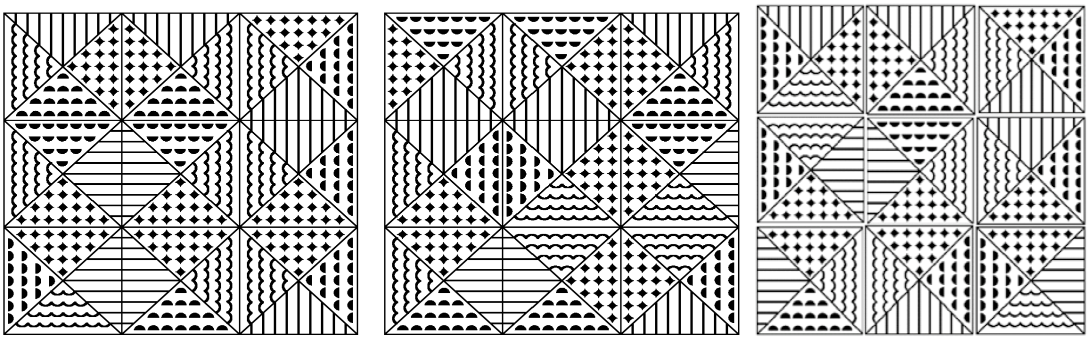
Beginn	1.U	2.U	3.U	4.U
4	1	2	4	6
1	4	3	5	5
5	5	6	6	4
6	6	5	3	3
3	3	4	2	2
2	2	1	1	1

Aufgabe 5 – *Patchwork-Decke* – 7 Punkte

Die Quadrate 1, 2 und 3 sind die von Claudia, die Quadrate 4, 5 und 6 sind die von Dominik.



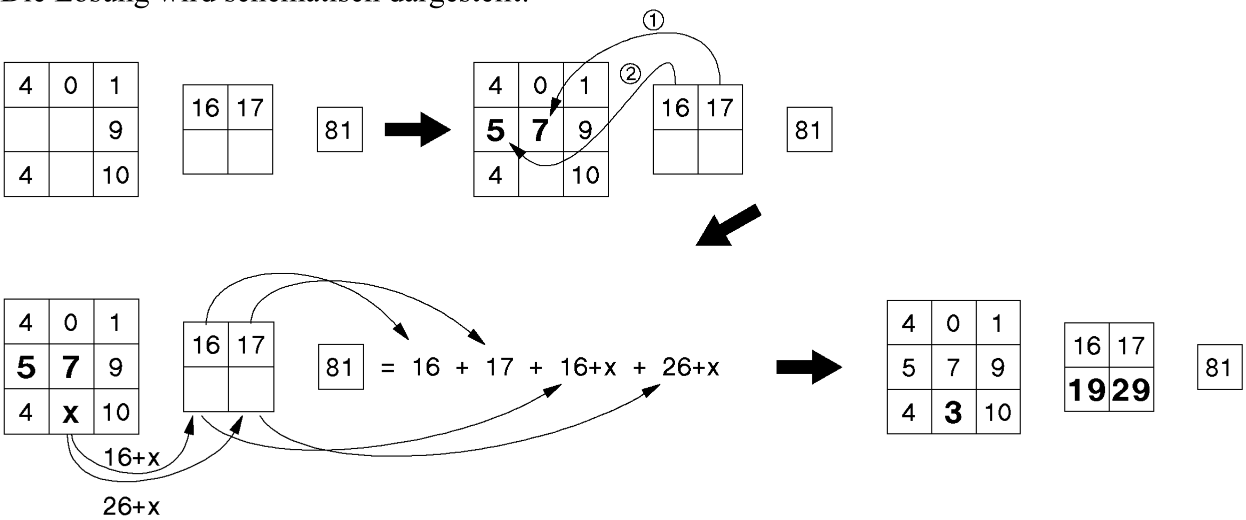
Hier mögliche Anordnungen:



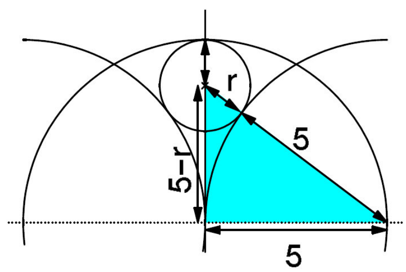
Die Lösung kann auch mit Hilfe von Farben oder Buchstaben dargestellt werden.

Aufgabe 6 – *Stufenpyramide* – 5 Punkte

Die Lösung wird schematisch dargestellt:



Aufgabe 7 – *Von großen und kleinen Kreisen* – 7 Punkte



Der Berührpunkt zweier Kreise liegt auf der Geraden, die ihre Mittelpunkte verbindet.
Mit Pythagoras ergibt sich:
$(5 + r)^2 = 25 + (5 - r)^2$ => $\mathbf{r = 1{,}25}$.
Zur Bestimmung der Mittelpunkte der kleinen Kreise fällt man also durch die Mittelpunkte der großen Kreise das Lot auf die horizontale Achse des Musters. Auf diesen Loten liegen die Mittelpunkte der kleinen Kreise, jeweils 3,75 cm von den Mittelpunkten der großen Kreise entfernt.

Aufgabe 8 – *Auf dem Tablett* – 5 Punkte

Hier 4 mögliche Verteilungen:

	voll	halbvoll	leer
1. Tablett	0	8	0
2. Tablett	4	0	4
3. Tablett	4	0	4

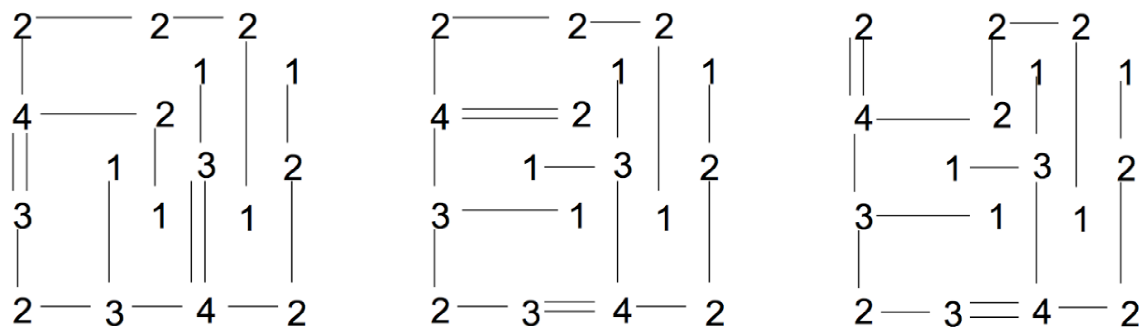
	voll	halbvoll	leer
1. Tablett	1	6	1
2. Tablett	3	2	3
3. Tablett	4	0	4

	voll	halbvoll	leer
1. Tablett	2	4	2
2. Tablett	2	4	2
3. Tablett	4	0	4

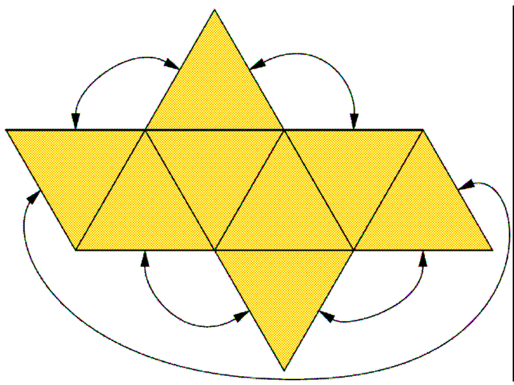
	voll	halbvoll	leer
1. Tablett	2	4	2
2. Tablett	3	2	3
3. Tablett	3	2	3

Aufgabe 9 – *Hashiwokakero* – 7 Punkte

Hier 3 mögliche Lösungen:



Aufgabe 10 – *Antiprisma* – 10 Punkte

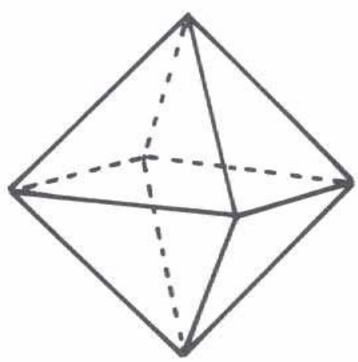


Hier das Netz des Antiprismas mit dreieckiger Grundfläche.

Faltet man es zusammen, dann erhält man ein regelmäßiges Oktaeder. Verbindet man vier seiner Ecken, die in einer Ebene liegen, dann erhält man ein Quadrat mit 4 cm Kantenlänge und 16 cm² Flächeninhalt.

Die Gesamthöhe des Oktaeders ist die Länge der Diagonalen eines solchen Quadrats, also $4\sqrt{2}$ cm.

Sein Volumen beträgt $\frac{64\sqrt{2}}{3} \approx 30{,}17\ \text{cm}^3$.



Klassenstufe 10

Aufgabe 11 – *An der Wurzel* – 5 Punkte

$\sqrt{1\,111-22}=\mathbf{33}$ und $\sqrt{111\,111-222}=\mathbf{333}$

Man vermutet, dass $\sqrt{111\,111\,111\,111\,111\,111\,111\,111-222\,222\,222\,222}$ = **333 333 333 333** ist.

Beweis durch Faktorisierung:

$$\sqrt{111\,111\,111\,111\,111\,111\,111\,111-222\,222\,222\,222}=$$
$$\sqrt{(111\,111\,111\,111\cdot 1000\,000\,000\,000+111\,111\,111\,111)-2\cdot 111\,111\,111\,111}=$$
$$\sqrt{111\,111\,111\,111\cdot(1000\,000\,000\,000+1-2)}=\sqrt{111\,111\,111\,111\cdot 999\,999\,999\,999}=$$
$$\sqrt{111\,111\,111\,111^2\cdot 9}=111\,111\,111\,111\cdot 3=333\,333\,333\,333$$

Oder man zeigt: $333\,333\,333\,333^2=111\,111\,111\,111\,111\,111\,111\,111-222\,222\,222\,222$.

Der Taschenrechner liefert hier kein korrektes Ergebnis. Deshalb muss von Hand gerechnet werden.

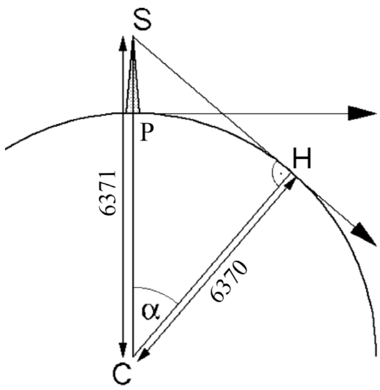
Aufgabe 12 – *Außer Sicht* – 7 Punkte

Die Entfernung, die Emir Abel zurückgelegt hat, wenn die Spitze des Turmes nicht mehr sichtbar ist, ist die Länge des Kreisbogens zwischen P und H. Die Länge dieses Bogens lässt sich mit Hilfe des Winkels α berechnen, für den gilt:

$\cos\alpha=\frac{CH}{CS}$; $\alpha=\arccos\left(\frac{6370}{6371}\right)\approx 1°$.

Die gesuchte Bogenlänge lässt sich durch

$\arccos\left(\frac{6370}{6371}\right)\cdot(2\pi:360°)\cdot 6370$ berechnen.

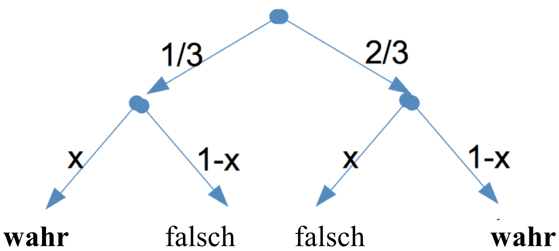


Es ergibt sich die Bogenlänge **112,86 km**

(Für α ≈ 1°, erhält man 111,18 km.)

Aufgabe 13 – *Ehrliche Diebe* – 10 Punkte

Mit dem Baumdiagramm ergibt sich:



60 % der befragten Personen haben mit „wahr" geantwortet, daher die Gleichung $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}(1-x)=0{,}6$

also $x=0{,}2$.

20% der befragten Personen haben schon einmal in einem Supermarkt gestohlen.