Mathematik ohne Grenzen - Probewettbewerb 2013-2014
Lösungshinweise

Aufgabe 1 – *Les frères Dalton*, 7 Punkte

Durch die Informationen 2 und 3 weiß man, dass Grat sich in der Zelle (0 ; B ; III) befindet.
Die Informationen 1, 2 und 5 lassen auf Bills Position schließen, nämlich (1 ; A ; I).
Emmett kann aufgrund der 4. Information und Grats Position nur in der Zelle (2 ; B ; I) sein.

Man erhält also: **Grat (0 ; B ; III) , Emmet (2 ; B ; I) und Bill (1 ; A ; I) .**

Aufgabe 2 – *Ach du grüne Neune*, 5 Punkte

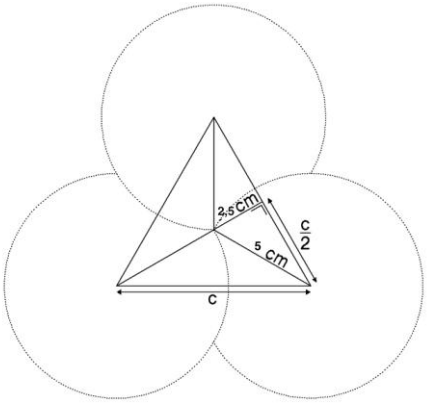
Der Trick besteht darin, die Multiplikation folgendermaßen umzuschreiben:

$$2013 \bullet \underbrace{999\ldots\ldots\ldots999}_{\text{Zahl bestehend aus 2013 Neunen}} = 2013 \bullet (10^{2013} - 1) = 2013\underbrace{00\ldots\ldots\ldots00}_{\text{2013 Mal die Ziffer 0}} - 2013 = 2012\underbrace{99\ldots\ldots\ldots99}_{\text{2009 Mal die Ziffer 9}}7987$$

Die Quersumme beträgt damit $2 + 1 + 2 + 2009 \times 9 + 7 + 9 + 8 + 7 =$ **18 117**.
Natürlich kann man die Multiplikation auch ansatzweise schriftlich durchführen, also die Zahl 2013 nach und nach mit 9, mit 99, mit 999 usw. multiplizieren, und durch Nachdenken auf die Ziffern schließen.

Aufgabe 3 – *Bierdeckel-Geometrie*, 7 Punkte

In der gesuchten Position ist der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks 5 cm von jeder Ecke und 2,5 cm von jeder Seite entfernt.
Mithilfe der nebenstehenden Zeichnung erhält man mit Pythagoras $\frac{c}{2} = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 2{,}5\sqrt{3}$ und damit $\boldsymbol{c} =$ **$5\sqrt{3}$ cm ≈ 8,66 cm.**

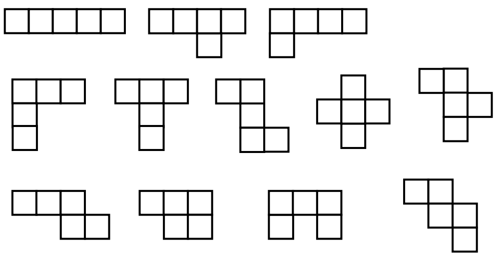


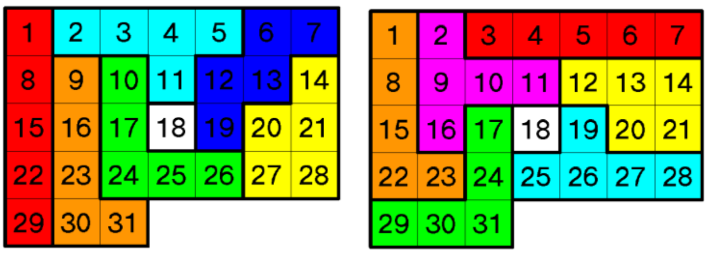
Aufgabe 4 – *Europa rückt zusammen*, 5 Punkte

Bei jeder Bewegung wird die tatsächliche Distanz vervierfacht. Da man von 150 m ausgeht, hat man nach dem 6. Mal 614,4 km und nach dem 7. Mal 2457,6 km. Jakob muss die Bewegung also **7 Mal** ausführen.

Aufgabe 5 – *Geburtstagspuzzle*, 7 Punkte

Die 12 Pentominos sind:





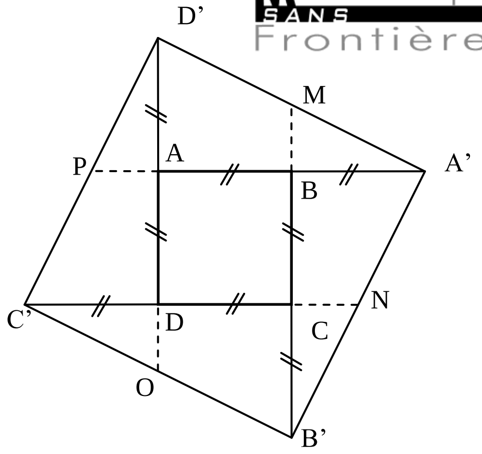
Durch Probieren findet man nun leicht eine passende Abdeckung. Von den zahlreichen Möglichkeiten sind zwei oben abgebildet.

Aufgabe 6 – *Richtig adressiert*, 5 Punkte

Es gibt 19 ungerade Zahlen von 1 bis 37 und 33 ungerade Zahlen von 1 bis 65.
Es gibt in meiner Straße also 19 + 33 – 1 = **51 Häuser mit ungerader Hausnummer.**

Aufgabe 7 – *Verloren gegangen*, 7 Punkte

Führt man die beschriebene Konstruktion aus, erhält man die nebenstehende Abbildung.
Da A an B gespiegelt wurde, ist B der Mittelpunkt der Strecke AA‘. Wegen (AD)||(BC) ist BM die Mittelparallele im Dreieck AA’D‘ und somit ist M der Mittelpunkt von A’D‘.
Analog zeigt man, dass N, O und P ebenfalls Seitenmittelpunkte des Quadrats A’B’C’D‘ sind.
Um nun aus dem Quadrat A’B’C’D‘ das Quadrat ABCD zu konstruieren, verbindet man die Seitenmitten M, N, O und P mit den Punkten B‘, C‘, D‘ und A‘.



Aufgabe 8 – *Fahrgemeinschaft*, 5 Punkte

Sei x die Anzahl der Autos mit 3 oder 4 Insassen und y die Anzahl der Autos mit 1 oder 2 Insassen.
Insgesamt sind dann $2x + 2y$ Autos auf den Parkplatz gefahren.
Für die Insassen gilt $3x + 4x + 2y + y = 7x + 3y = 100$ bzw. $3y = 100 – 7x$.
Da x und y natürliche Zahlen sind, ist $100 – 7x > 0$ und durch 3 teilbar.
Daraus ergeben sich die in der Tabelle dargestellten Möglichkeiten:

	x	1	4	7	10	13
	y	31	24	17	10	3
Anzahl der Autos	$2x + 2y$	64	56	48	40	32
Gesamtzahl der Personen	$7x + 3y$	100	100	100	100	100

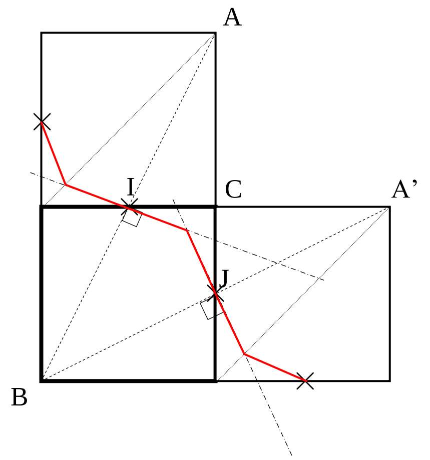
Die verschiedenen Möglichkeiten für die Anzahl der einfahrenden Autos sind also:
64; 56; 48; 40; 32.

Durch systematisches Probieren kann man auch ohne Gleichung zum Ergebnis kommen.

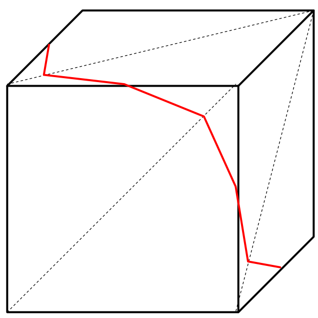
Aufgabe 9 – *Zum Kugeln*, 7 Punkte

Man kann die sichtbaren Zahlen auf den Kugeln in Faktoren zerlegen und nach und nach die verschiedenen Möglichkeiten durchprobieren.
Man findet schnell heraus, dass die 5 in die Kugel mit der 96 gehört, da sie die einzige ist, die mit drei Vielfachen von 5 verbunden ist: 20; 15 und 60. Ebenso befindet sich die 7 in der Kugel mit der 12, da sie die einzige ist, die mit drei Vielfachen von 7 verbunden ist: 84; 112 et 336. Durch ähnliche Schlussfolgerungen kann man die noch fehlenden Zahlen zuordnen.
Man erhält folgende Lösung:
12 (**7**) – 84 (**3**) – 60 (**6**) – 336 (**4**) – 112 (**1**) – 15 (**2**) – 96 (**5**) – 20 (**8**)

Aufgabe 10 – *Einfriedung*, 10 Punkte



Auf dem Netzquadrat mit den Eckpunkten B und C lassen sich die Punkte mit gleicher Entfernung von A und B folgendermaßen finden: Es sind die Punkte der Mittelsenkrechten der Strecke AB, die oberhalb der Diagonalen AC liegen sowie die Punkte der Mittelsenkrechten der Strecke A’B, die unterhalb der Diagonalen BC liegen.
Auf dieselbe Weise kann man die Grenzlinie auf den beiden anderen Flächen konstruieren.



Aufgaben Klasse 10

Aufgabe 11 – *Farbenspiel*, 5 Punkte

Bei 4 Deckeln gibt es 4! = 24 mögliche Kombinationen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Deckel auf dem gleichfarbigen Stift sitzt, beträgt $\frac{1}{24}$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Deckel auf einem gleichfarbigen Stift befindet, sucht man alle dafür günstigen Möglichkeiten. Es sind 9 Stück.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Deckel auf einem gleichfarbigen Stift befindet, ist damit $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

Aufgabe 12 – *Charlie forever*, 7 Punkte

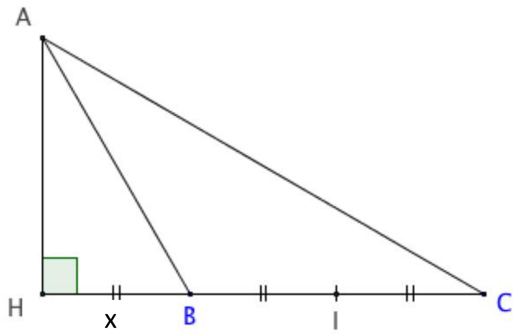
Man geht von einer Anzahl von 100 Schülern aus.
Wenn 71 Schülern der Film A gefallen hat und 76 Schülern der Film B gefallen hat, haben mindestens 71 + 76 - 100 = 47 Schülern beide Filme gefallen.
Da 63 Schülern der Film C gefallen hat, haben mindestens 47 + 63 – 100 = 10 Schülern alle drei Filme gefallen.
Der kleinste prozentuale Anteil an Schülern, denen alle drei Filme gefallen haben, beträgt 10%.

Es kann auch sein, dass alle, die den Film C mögen, auch A mögen und alle, die A mögen, auch B mögen.

Dann mögen die 63 Schüler, die C mögen, auch A und B.
Der größte prozentuale Anteil an Schülern, denen alle drei Filme gefallen haben, beträgt 63%.

Aufgabe 13 – *Auf den Punkt kommen*, 10 Punkte

Ein Dreieck mit den genannten Eigenschaften muss stumpfwinklig sein, was bedeutet, dass die Fußpunkte zweier Höhen außerhalb des Dreiecks liegen.
Konstruktion: Man zeichnet die Seite BC mit dem Mittelpunkt I. Der Kreis um B mit dem Radius BI schneidet die Gerade (BC) im Höhenfußpunkt H. Schneidet man den Kreis um B mit dem Radius BC mit der Orthogonalen zu (BC) durch H, so erhält man den Eckpunkt A des Dreiecks.



Berechnung der Seitenlängen:
Sei HB = BI = IC = x. Damit ist AB = BC = 2x.
Im Dreieck AHB erhält man mit Pythagoras:
$AH = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$
Wendet man Pythagoras im Dreieck AHC an, so erhält man:
$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2x\sqrt{3}$

Die Fläche des Dreiecks ABC (in mm^2) ist $\frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x\sqrt{3} = 10000$.

Damit ist $x = \sqrt{\frac{10000}{\sqrt{3}}}$ bzw. $a = 2x \approx 152$ und $b = AC = 2x\sqrt{3} \approx 263$.

Die Seiten des Dreiecks sind also 152mm bzw. 263 mm lang.