Mathematik ohne Grenzen - Probewettbewerb 2012-2013
Lösungshinweise

<u>Aufgabe 1 – *Tour de chien*, 7 Punkte</u>

Mein Hund und ich bewegen uns mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Auf der Hälfte des Weges überholt er mich. Er läuft eineinhalb Runden, während ich eine halbe Runde um den See gehe. Seine Geschwindigkeit ist also die dreifache meiner Geschwindigkeit.
Wenn er entgegengesetzt gelaufen wäre, hätten wir uns zum ersten Mal nach einer Viertelrunde getroffen. Er wäre dann eine Dreiviertelrunde gelaufen. Wir wären uns noch zweimal nach jeweils einer weiteren Viertelrunde begegnet, bevor wir gemeinsam angekommen wären. Mein Hund hätte also **drei Mal** meinen Weg gekreuzt.

<u>Aufgabe 2 – *Abrechnung*, 5 Punkte</u>

Die Kosten betragen für jeden 39 €. Nach Verrechnung der Auslagen bekommt Luise noch 57 € und Milena 3 €, während Julius noch 21 € und Christoph 39 € bezahlen muss. Da Julius Christoph noch 15 € schuldet, zahlt er 36 € an die Mädchen, so dass Christoph 15 € weniger, also 24 € zu zahlen hat. Dies lässt sich durch drei Geldübergaben regeln:
Julius gibt Luise 36 €, Christoph gibt Luise 21 € und Milena 3 €
oder: **Julius gibt Luise 33 € und Milena 3 €**, **Christoph gibt Luise 24 €.**

<u>Aufgabe 3 – *Das ABC des Flechtens*, 7 Punkte</u>

Die Folgen aus zwei Vorlagen, die sich aufheben, sind: **AC, CA, BD** und **DB**.
Man kann den Zopf von Pauline folgendermaßen vereinfachen:
D(~~D~~(~~AC~~)~~B~~)AA(~~AC~~)D(~~D~~(~~CA~~)~~B~~)A(~~BD~~) = DAADA.
Um diesen aufzulösen muss man die jeweiligen „Inversen“ tippen, und zwar in umgekehrter Reihenfolge: **CBCCB**.

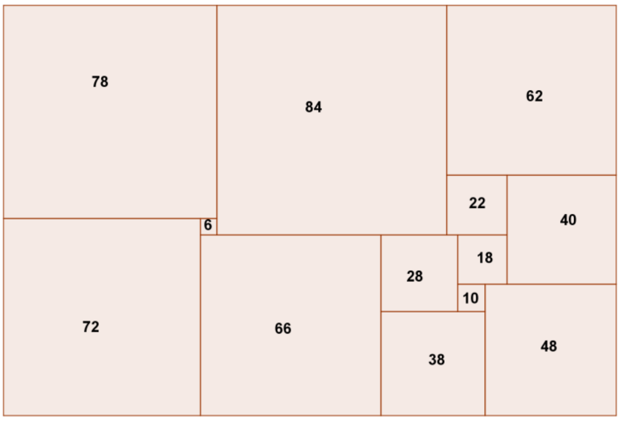
<u>Aufgabe 4 – *Plus und Minus*, 5 Punkte</u>

Die Lösung der Gleichung $2012-5n = 1024+3n$ ergibt $n = 123{,}5$.
Man probiert daher $n = 123$ und $n = 124$ aus.
Die Zahlen, die einander am nächsten sind, sind **1397 und 1393** oder **1392 und 1396**.

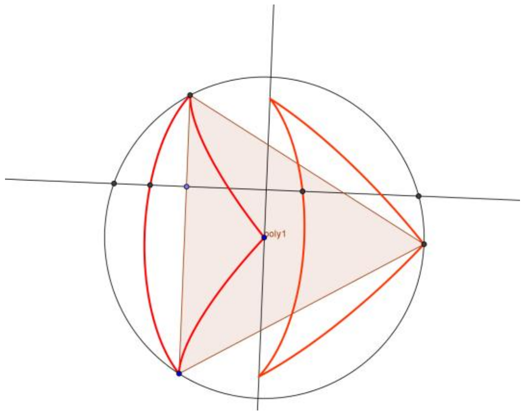
<u>Aufgabe 5 – *Nach dem Regen*, 7 Punkte</u>

Die Berechnung des Wasservolumens im Becken ergibt 106 000 cm^3 = 106 l.
Das Wasservolumen pro Quadratmeter ergibt sich aus der gesamten Bodenfläche des Beckens: $(1{,}7\ \text{m})^2 = 2{,}89\ \text{m}^2$.
Man findet also ungefähr **36,7 l Wasser pro Quadratmeter** vor.

<u>Aufgabe 6 – *Millimetergenau*, 5 Punkte</u>

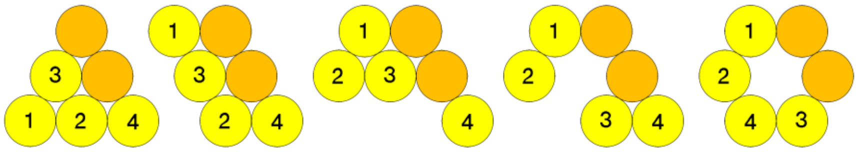


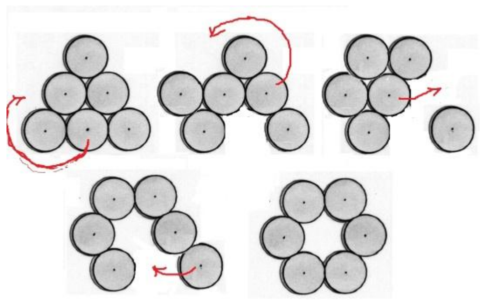
Aufgabe 7 – *Zwillingsdrachen*, 7 Punkte



Aufgabe 8 – *Taler, Taler, du musst wandern*, 5 Punkte

Hier zwei Lösungen in 4 Zügen:

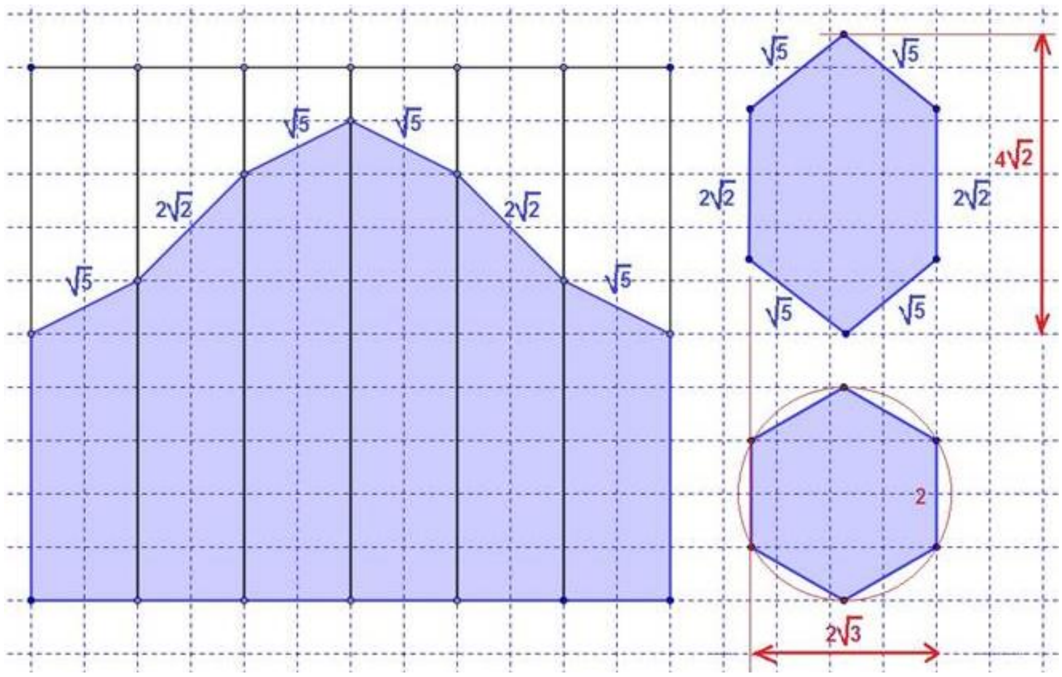




Aufgabe 9 – *Geht's oder geht's nicht?*, 7 Punkte

Die Aufgabe besteht darin, alle Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu finden, deren Umfang 21 cm beträgt. Dabei muss die Dreiecksungleichung beachtet werden.
Es gibt 12 Lösungen: **(10 ; 10 ; 1), (10 ; 9 ; 2), (10 ; 8 ; 3), (10 ; 7 ; 4), (10 ; 6 ; 5), (9 ; 9 ; 3), (9 ; 8 ; 4), (9 ; 7 ; 5), (9 ; 6 ; 6), (8 ; 8 ; 5), (8 ; 7 ; 6) und (7 ; 7 ; 7).**

Aufgabe 10 – *Kristalle*, 10 Punkte



Die Berechnung der Seitenlängen ist nicht verlangt; diese sind lediglich zur Erleichterung der Korrektur angegeben.

Aufgabe 11 – *Bedingte Freiheit*, 5 Punkte

Wenn jede Urne gleich viele weiße und schwarze Kugeln enthält, beträgt die Wahrscheinlichkeit auf Freiheit $\frac{1}{2}$.

Bei jeder anderen Aufteilung ist die Wahrscheinlichkeit auf Freiheit größer als $\frac{1}{2}$, wenn der Wärter die „richtige“ Urne auswählt, und kleiner als ½, wenn er die „falsche“ Urne auswählt. Wenn der Gefangene eine einzige weiße Kugel in die eine Urne und alle anderen Kugeln in die andere Urne legt, betragen die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{1}$ und $\frac{11}{23}$.

Dies ist die für den Gefangenen günstigste Aufteilung.

Die Wahrscheinlichkeit auf Freiheit ist in diesem Fall: $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{23}=\frac{17}{23}$**, also fast 74%**.

Aufgabe 12 – *Treppauf*, 7 Punkte

Sobald man die n-te Stufe erreicht, hat man die (n-1)-te oder die (n-2)-te verlassen, je nachdem, ob man einen kleinen oder großen Schritt gemacht hat.

Wenn man die Anzahl der Möglichkeiten, die n-te Stufe zu erreichen, mit u_n bezeichnet, erhält man den rekursiven Zusammenhang $\boxed{u_n = u_{n-1} + u_{n-2}}$.

Die nachfolgenden Terme resultieren aus den beiden Anfangswerten $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**
u_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	**377**

Man erkennt die Fibonnaccifolge.

Aufgabe 13 - *Teleskopisch*, 10 Punkte

Man beweist mit dem Strahlensatz, dass jedes Element ein Viertel der Höhe des vorherigen bedeckt, wenn der Becher auseinandergefaltet ist. Die Innenhöhe des Bechers beträgt damit 80 mm.

Um das Fassungsvermögen des Bechers abzuschätzen, kann man den Becher an einen Kegelstumpf annähern.

Die Formel ergibt dann: $V \approx \frac{\pi\times 80}{3}\left(15^2+15\times 35+35^2\right)$ **≈ 165 457 mm³ ≈ 165 cm³**.

Die (genauere) Berechnung über die einzelnen Elemente ergäbe 164 703 mm^3