Mathematik ohne Grenzen

Ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 1999/2000

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben. Bei den Aufgaben 2, 3, 4, 6 und 8 ist keine Erklärung verlangt. Bei allen anderen Aufgaben muss die Lösung begründet werden.

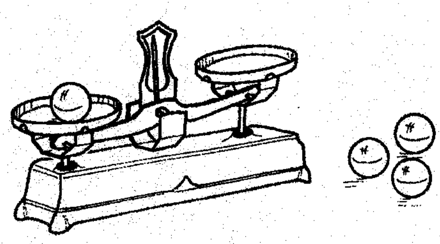
Aufgabe 1
10 Punkte

Zweimal ist genug

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Antoine dispose de 4 billes identiques, appelées A, B C et D. Parmi elles, 3 ont la même masse et la quatrième a une masse différente. Il ne sait pas si cette bille est plus lourde ou plus légère que les autres. Antoine ne possède qu'une balance permettant de comparer des masses et il doit déterminer la bille différente des autres en deux pesées maximum.

Comment doit-il procéder?



Antonio ha 4 biglie d'aspetto identico, dette A,B,C e D. Tre hanno la stessa massa e la quarta ha una massa differente. Non si sa se questa biglia è più pesante o più legera delle altre. Antonio ha una sola bilancia che permette di comparare delle masse e deve determinare la biglia que è differente delle altre in due pesate al massimo.

Come deve procedere?

Antony has got 4 apparently identical marbles called A, B, C and D. Three of them have a similar mass, and the fourth marble has got a different one. He does not know if the marble is heavier or not as heavy as the others. Antony has got only scales that enable him to compare masses and he has to determine which marble is different from the others in a maximum of two weightings.

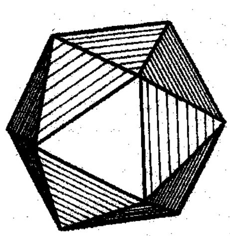
How does he have to proceed?

Antonio posee cuatro canicas, aparentemente idénticas, llamadas A, B, C, D. Tres de ellas tienen la misma masa y la cuarta tiene una masa diferente. No sabe si esta cuarta canica pesa más o menos que las demás. Antonio solo tiene una balanza que permite comparar masas y tiene que encontrar la canica diferente de las demás en solo dos pesadas.

¿Cómo tiene que proceder?

Aufgabe 2
5 Punkte

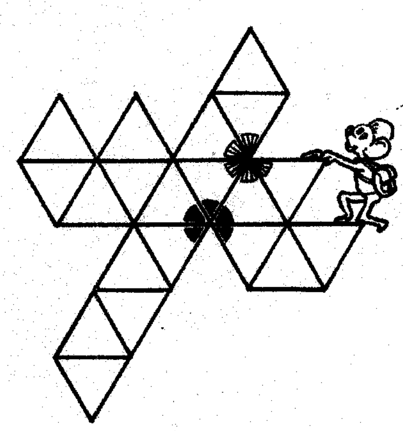
Spitzfindigkeiten



Das Ikosaeder ist ein regelmäßiger Körper mit 12 Ecken und 20 Seitenflächen in Form gleichseitiger Dreiecke.

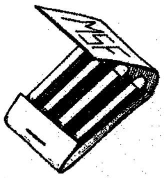
Zeichne das abgebildete Netz dieses Körpers auf das Antwortblatt!

Kennzeichne durch eine gemeinsame Farbe oder ein Symbol jeweils alle Dreieckswinkel, welche zum selben Eckpunkt des Ikosaeders gehören!



Aufgabe 3
10 Punkte

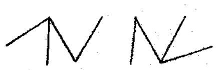
Streichholzspiele



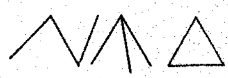
Eine bestimmte Anzahl Streichhölzer soll auf dem Tisch nach folgenden Regeln angeordnet werden:

- Jedes Streichholz berührt mindestens ein anderes.
- Die Streichhölzer dürfen sich nur an den Enden berühren.

Zwei Anordnungen werden als gleichartig angesehen, wenn die eine ohne Hochheben der Hölzchen in die andere überführt werden kann und der Kontakt der Hölzchen an den Enden erhalten bleibt.



Hier sind zum Beispiel zwei gleichartige Anordnungen zu sehen.



Mit drei Streichhölzern kann man auf diese Weise nur drei verschiedenartige Anordnungen legen.

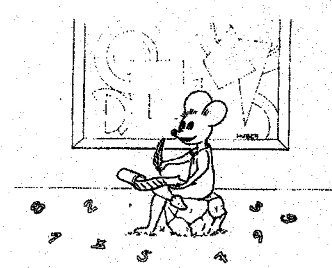
Vier Streichhölzer lassen sich auf fünf verschiedene Arten anordnen

Auf wie viele Arten lassen sich fünf Streichhölzer anordnen? Zeichne die Anordnungen auf das Antwortblatt!

Aufgabe 4
5 Punkte

Noch'n Gedicht

Das Viereck ist mein Heimatland.
Mein Name ist dir wohl bekannt.
Verbindest du zwei Nachbarecken,
So wirst du nimmer mich entdecken.
Doch lässt du eine Ecke aus,
Dann hast du's raus.

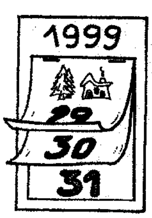


Mit Kind und Kegel übern Pregel,
Stets nur einmal, Brück' um Brück' –
Und doch zum selben Punkt zurück.
Er zeigte, dass man dies nicht kann.
Wie hieß der Mann?

Wer oder was verbirgt sich hinter den beiden Texten? Schreibe selbst ein kleines Gedicht mit mathematischem Inhalt!

Aufgabe 5
10 Punkte

Jahrtausendwende



Gregor und Julia machen ein Wettspiel mit den Daten eines Kalenderjahres. Der Spieler, der beginnt, nennt zunächst ein Datum im Januar, z.B. den 6. Januar. Nun nennen die Spieler abwechselnd ein späteres Datum, bei dem entweder die Tageszahl oder der Monat mit dem zuvor vom Gegner genannten Datum übereinstimmen muss.

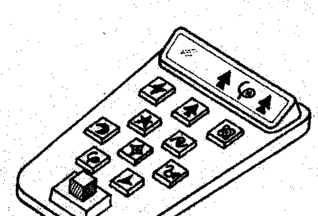
So kann zum Beispiel nach dem 6. Januar der 10. oder der 25. Januar, aber auch der 6. Februar oder der 6. September genannt werden. Sieger ist, wer zuerst den 31. Dezember nennt.

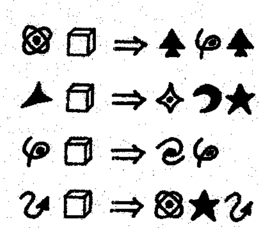
Nach einigen Spielrunden behauptet Julia, es gäbe eine Strategie, mit deren Hilfe man mit Sicherheit gewinnt.

Erkläre diese Strategie!

Aufgabe 6
5 Punkte

Kubikator



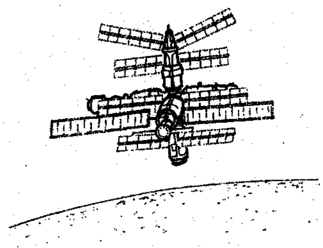


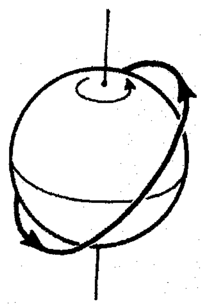
Auf dem Planeten XCYZQ ist fast alles würfelförmig. Zwar benutzen die Bewohner wie wir das Dezimalsystem, aber die Ziffern werden durch andere Symbole dargestellt. Die wichtigste Rechenoperation ist das sogenannte *Kubizieren*, bei der zu einer Zahl die Kubikzahl gebildet wird.

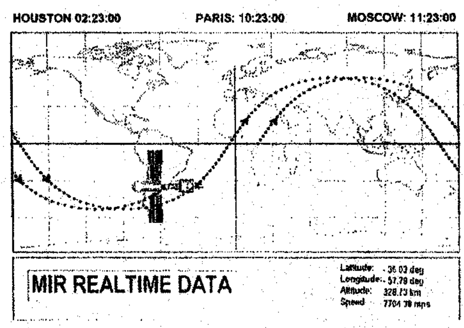
Dazu verwendet man eine Art Taschenrechner, der Kubikator genannt wird. Er besitzt zehn Tasten für die Ziffern und eine Taste (□), um zu kubizieren. Oben stehen vier Operationen, die mit dem Kubikator ausgeführt wurden.

Übersetze die Symbole in unsere Ziffern von 0 bis 9!

Aufgabe 7 10 Punkte ★ МИР ★

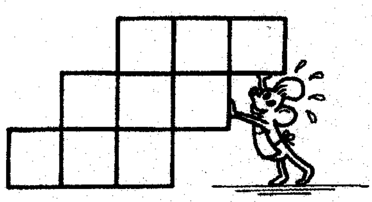






Die Raumstation MIR umrundet die Erde auf einer annähernd kreisförmigen Bahn, die in Bezug auf die Äquatorebene geneigt ist.
Boris staunt nicht schlecht, als er entdeckt, dass er auf dem Monitor seines Computers die Position von MIR minutenweise verfolgen kann. In Paris ist es 10.23 Uhr, als sich MIR über Buenos Aires befindet.
Für eine Erdumrundung benötigt MIR 91 Minuten, was bedeutet, dass die Station alle 45,5 Minuten den Äquator überfliegt. Wegen der Drehung der Erde um ihre Achse sind die Spuren der Bewegung nach jedem Umlauf verschoben.
Zeichne auf der beigefügten Karte die Fortsetzung der Bahn ein, bis die Station Frankreich überfliegt! Schätze den Zeitpunkt ab, zu dem sich MIR über Paris befindet!

Aufgabe 8 5 Punkte Durcheinander

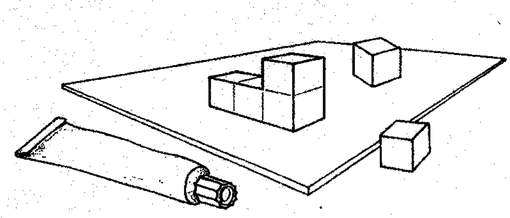


Trage die Zahlen von 1 bis 9 so in das Gitter ein, dass in keiner Zeile, in keiner Spalte und auch in keiner Diagonalen zwei aufeinanderfolgende Ziffern stehen.

Aufgabe 9 10 Punkte Kubokollage

WCZXOP, ein Bewohner des Planeten XCYZQ, den wir bereits aus Aufgabe 6 kennen, vertreibt sich die Zeit mit kleinen Würfeln der Kantenlänge 1 cm. Er klebt den ersten Würfel auf eine Grundplatte und dann einen zweiten Würfel an den ersten, so dass zwei Seitenflächen zur Deckung kommen. Dabei kann eine Seitenfläche des zweiten Würfels auch auf der Grundplatte liegen.

Auf diese Weise klebt er weitere Würfel an, wobei stets nur eine Seitenfläche des neuen Würfels mit nur einer Seitenfläche aller vorherigen Würfel zur Deckung kommt. Es ist nach wie vor erlaubt, dass eine andere Fläche des Würfels auf der Platte liegt.



Schließlich haben die sichtbaren Seiten von WCZXOPs Bauwerk insgesamt einen Flächeninhalt von 30 cm².
Aus wie vielen Würfeln besteht das Gebilde? Begründe deine Antwort! Zeichne das Schrägbild einer solchen Anordnung.

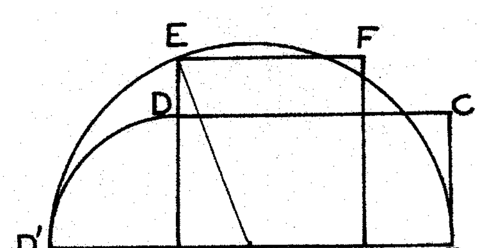
Aufgabe 10 15 Punkte Quadratur

Bei der Quadratur eines Rechtecks verwandelt man ein Rechteck allein mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat.

Hier ist ein Verfahren von Euklid zur Quadratur des Rechtecks ABCD mit den Seiten AB = x und AD = y:

- Trage die Strecke AD auf der Geraden (AB) ab, um die Strecke AD‘ zu erhalten.
- Der Punkt E liegt auf dem Halbkreis mit dem Durchmesser DB‘ und auf der Geraden (AD).
- Konstruiere das Quadrat AGFE.

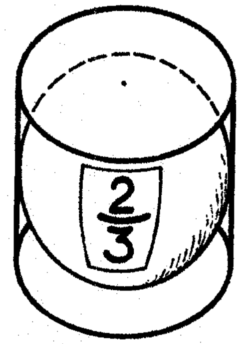
Zeige, dass in der nebenstehenden Figur das Rechteck ABCD und das Quadrat AGFE den gleichen Flächeninhalt haben!



Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Archimetrisch



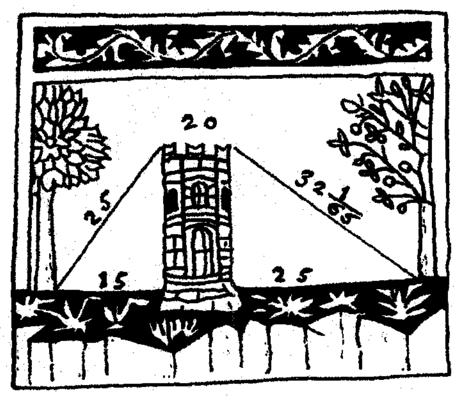
In dem Roman *„Das Theorem des Papageis"* von Denis Guedj findet sich die nebenstehende Abbildung, die in ähnlicher Form auch in das Grabmal des Archimedes eingemeißelt ist.

Sie zeigt einen Zusammenhang, der von Archimedes bewiesen wurde.

Nenne diesen Zusammenhang und weise ihn mit Hilfe bekannter Formeln nach!

Aufgabe 12
10 Punkte

Ziemlich genau



Die nebenstehende Abbildung entstammt dem Werk *„Compendion Del Abaquos"*, das im Jahre 1492 von Frances Pelos in okzitanischer Sprache verfasst wurde.
Camille und David, die keinen Taschenrechner zur Hand haben, versuchen herauszufinden, wie Pelos auf den Wert $32\frac{1}{65}$ gekommen ist.

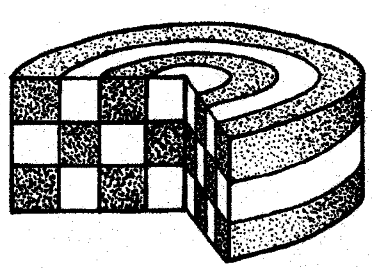
„Das ist einfach", meint Camille. „Wie man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet wissen wir ja."

„$32^2 = 1024$ und $33^2 = 1089$", ergänzt David. „Jetzt fehlt nur noch der Schritt von 1024 zu 1025."

Erläutere die Überlegung der beiden und setze sie fort, um auf das Ergebnis $32\frac{1}{65}$ zu kommen!

Aufgabe 13
15 Punkte

Omis Kuchen



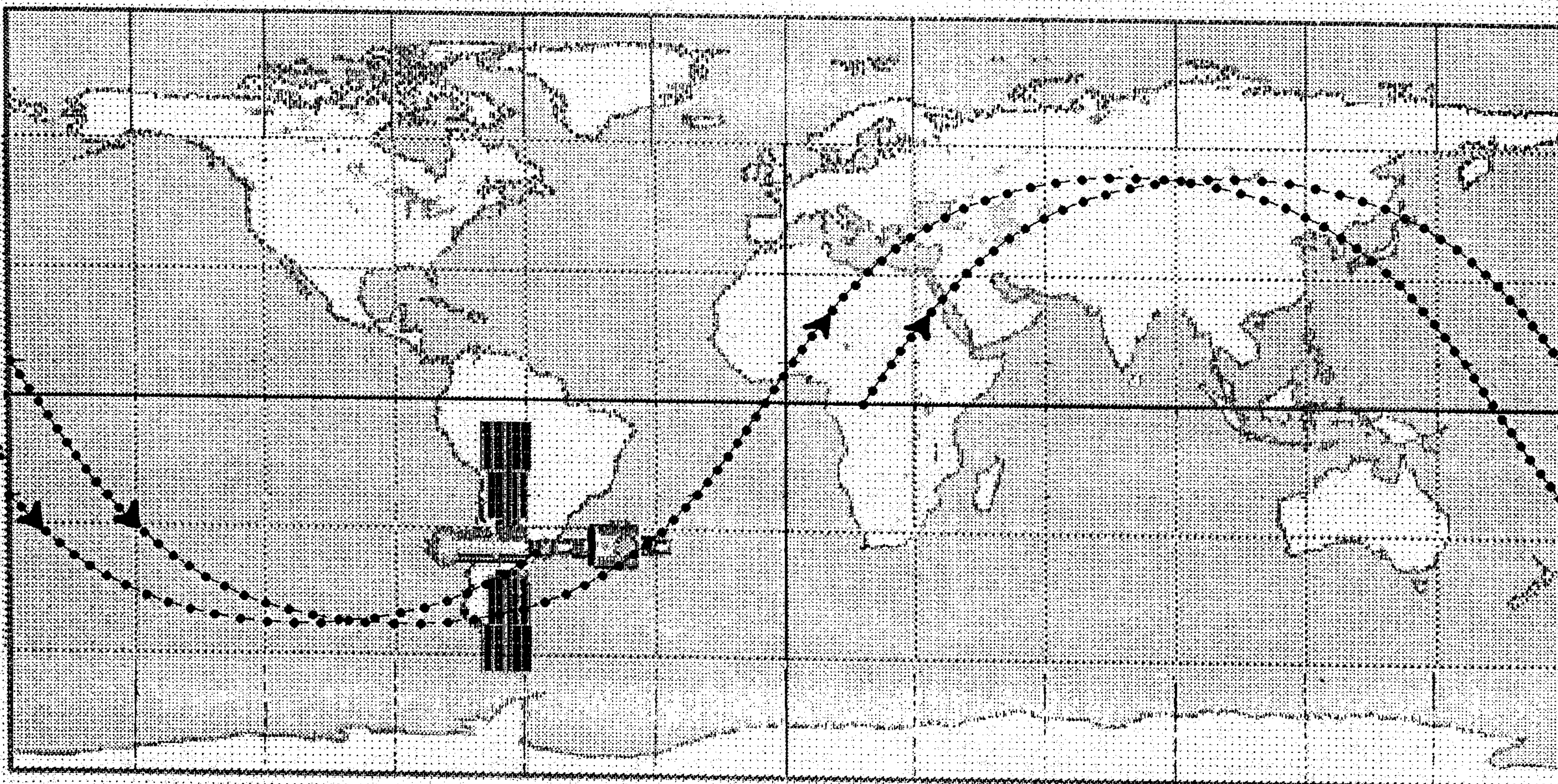
Omis Kuchen steckt voller Überraschungen. Wenn man ihn anschneidet, sieht man, wie viel Mühe sie sich gegeben hat. Sie hat zwei Teigsorten verwendet, eine aus Vanille und eine aus Schokolade.
Der Kuchen besteht aus drei gleich hohen Schichten, die kreisförmig unterteilt sind. Beim Anschnitt bis zur Mitte werden 12 gleich große Rechtecke sichtbar.

Nachdem der kleine Gaston die schwarzen und weißen Rechtecke gezählt hat, bemerkt er: „Omi, ich glaube, du hast genau so viel Vanilleteig wie Schokoladenteig verwendet."

Hat Camille Recht? Begründe deine Antwort!

zu Mathematik ohne Grenzen: Übersicht

HOUSTON 02:23:00 PARIS: 10:23:00 MOSCOW: 11:23:00



MIR REALTIME DATA

Latitude: - 36.03 deg
Longitude: - 57.79 deg
Altitude: 328.73 km
Speed: 7704.38 mps