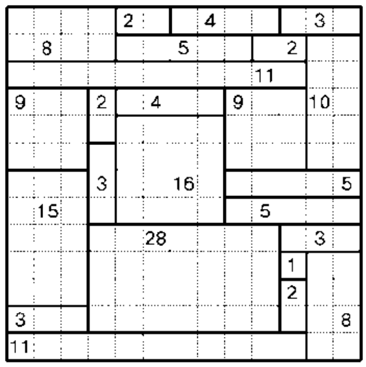
Hauptwettbewerb 2017 - Lösungshinweise

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 1 – *Stühlerücken* - 7 Punkte -

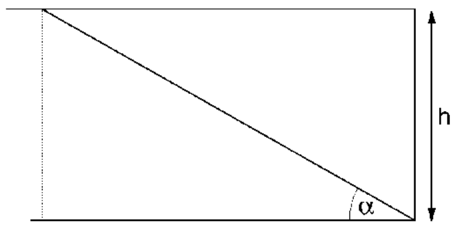
Sei *n* die Anzahl der Stühle pro Reihe. Dann befinden sich im Saal 9*n* Stühle.
Bei der ersten Konferenz sind zwei Drittel der Stühle besetzt, also 6*n*.
Für die zweite Konferenz sind nur noch drei Viertel der Teilnehmer angemeldet. Es werden dann also 4,5*n* Stühle benötigt (drei Viertel von 6*n*). Da nur ganze Stuhlreihen entfernt werden, gilt:
Es müssen fünf Stuhlreihen im Saal bleiben, damit bei der zweiten Konferenz jeder angemeldete Teilnehmer einen Sitzplatz hat.



Aufgabe 2 – *Shikaku* - 5 Punkte -

Man sieht gleich, dass das Rechteck mit der 1 schon definiert ist, und dass die 11 in einem langen horizontalen Rechteck stehen muss. Danach ergibt sich das Rechteck um die 8 und so weiter.

Aufgabe 3 – *Schief gewickelt* - 7 Punkte -



Wenn man sich vorstellt, die Girlanden nicht um die Säulen zu wickeln, sondern sie unter Beibehaltung der Steigung in der Ebene aufzuspannen, erkennt man, dass wegen derselben Höhe h der Säulen und demselben Steigungswinkel α der Girlanden beide Girlanden gleich lang sein müssen.

Für die Länge l der Girlanden gilt: $l = \frac{h}{\sin(\alpha)}$, unabhängig vom Durchmesser der Säulen.

Da beide Säulen gleich hoch sind und beide Girlanden dieselbe Steigung aufweisen, sind die beiden Girlanden gleich lang.

Aufgabe 4 – *Sagrada Familia* - 5 Punkte -

Die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte ist 33. So ergeben sich schon 2 Lösungen. Die Summe der Zahlen in den Diagonalen beträgt auch 33. Das führt auf eine dritte Lösung.
Die Unterteilung in 4 Teilquadrate der Summe 33 ist leicht zu erkennen. Und da die Summe der Zahlen in dem inneren Quadrat 33 beträgt, lassen sich weitere Lösungen finden. Es gibt übrigens noch mehr als die hier abgebildeten…

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Aufgabe 5 – *Um Haaresbreite* - 7 Punkte -

Das Auto muss 7,20 m zurücklegen (2,50 m + 4,70 m), während der hintere Lastwagen mit 90 km/h 18 m zurücklegt (20 m – 2 m).

Für die Minimalgeschwindigkeit v [in km/h] des Autos gilt: $\frac{7{,}20}{v} = \frac{18}{90}$, also $v = \frac{7{,}20 \cdot 90}{18} = 36$.

Die Geschwindigkeit des Autos muss mindestens 36 km/h betragen.

Aufgabe 6 – *Verflixte Liste* - 5 Punkte –

Wenn man den Algorithmus noch viermal anwendet, erhält man: 3,2 ; 0,9 ; 8,1 ; 6,3 ; 2,7 ; 4,5 ; 0,9,
und man sieht, dass die Zahlenfolge ab dem zweiten Folgeglied periodisch ist. Die Periode hat die Länge 5.
Daher ist die 38. Zahl der Liste dieselbe wie die dritte, nämlich 8,1.
Die 2017. Zahl der Liste ist dieselbe wie die zweite, nämlich 0,9.

Aufgabe 7 – *Kuboktaeder* - 7 Punkte -

Da die Ecken des Kuboktaeders die Mittelpunkte der Würfelkanten sind, hat das Kuboktaeder so viele Ecken, wie der Würfel Kanten hat. Damit gilt e = 12.
Die Anzahl der quadratischen Seitenflächen des Kuboktaeders entspricht der Anzahl der Seitenflächen des Würfels (6), und die Anzahl der dreieckigen Seitenflächen des Kuboktaeders entspricht der Anzahl der Ecken des Würfels (8). Für die Anzahl f der Seitenflächen des Kuboktaeders gilt also: f = 6 + 8 = 14.
Um die Anzahl k der Kanten zu ermitteln, genügt es, die Kanten der quadratischen Seitenflächen zu zählen, denn jede Kante begrenzt genau ein Quadrat und ein Dreieck. Das Kuboktaeder hat also k = 6 · 4 = 24 Kanten.
12 + 14 - 24 = 2. Somit ist der Eulersche Polyedersatz für das Kuboktaeder bestätigt.

Das Volumen des Kuboktaeders erhält man, wenn man von dem Volumen des Würfels das Volumen der 8 Pyramiden abzieht: $V = c^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \right) \cdot \frac{c}{2} \right] = c^3 - \frac{c^3}{6} = \frac{5}{6} c^3$.

Das Volumen des Kuboktaeders beträgt $\frac{5}{6} c^3$ Volumeneinheiten.

Aufgabe 8 – *Eckenrechnen* - 5 Punkte -

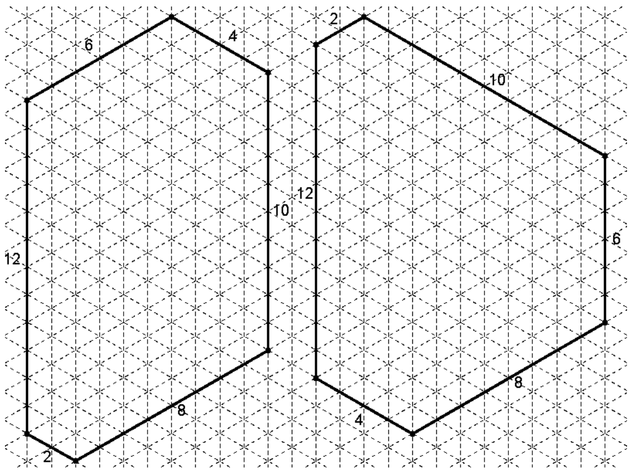
Wenn a, b, c und d die Zahlen auf den Seitenflächen sind, stehen an den Ecken die Zahlen
abc, bcd, abd und acd.

Das Produkt $(abcd)^3$ dieser vier Zahlen ergibt laut Aufgabenstellung $27\,000 = 30^3$.
Daraus folgt: $abcd = 30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Auf den Seitenflächen des Tetraeders stehen die Zahlen 1, 2, 3 und 5
oder 1,1, 2 und 15
oder 1,1,3 und 10
oder 1,1,5 und 6
oder 1,1,1 und 30.

Aufgabe 9 – *Seifenblasen* - 7 Punkte -

Da jeder Winkel 120° beträgt, sind gegenüberliegende Seiten parallel. Hier die zwei möglichen Lösungen.



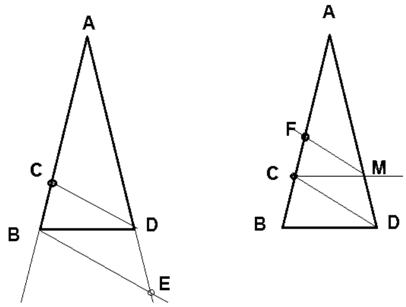
Aufgabe 10 – *Strahlend!* - 10 Punkte -

Mit den Strahlensätzen gilt $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$. Da $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$ gilt, erhält man $\frac{1}{\overline{AC}} = \overline{AE}$.

Zur Ermittlung des Punktes F zeichnet man durch C eine Parallele zur Strecke BD. Sie schneidet die Strecke AD im Punkt M. Dann zeichnet man durch M eine Parallele zur Strecke CD. Sie schneidet die Strecke AB im Punkt F.

Mit den Strahlensätzen gilt $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$.

Da $\overline{AM} = \overline{AC}$ und $\overline{AD} = 1$ gilt, erhält man $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{1}$ und somit $\overline{AF} = (\overline{AC})^2$.



Mathématiques SANS Frontières

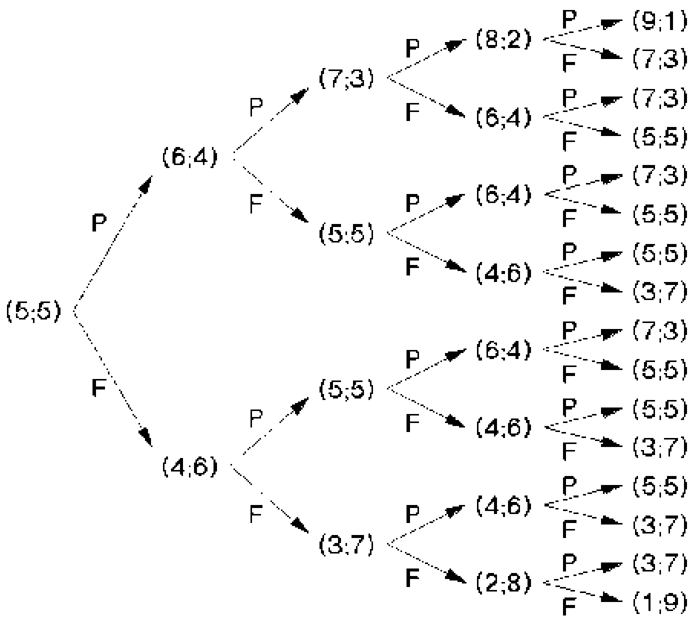
Klasse 10

Aufgabe 11 – *Kopf oder Zahl* - 5 Punkte -

Die Situation lässt sich mit einem Baumdiagramm darstellen.
P bedeutet: *Karina gewinnt*.
F bedeutet: *Zlatan gewinnt*.
In den Zahlenpaaren bezeichnet die erste Zahl die Anzahl von Karinas Bonbons und die zweite Zahl die Anzahl von Zlatans Bonbons.
Da bei jedem Münzwurf Karinas Gewinnwahrscheinlichkeit genauso groß ist wie die von Zlatan, sind alle 16 Ergebnisse gleich wahrscheinlich.
Bei fünf Ergebnissen hat Karina am Ende mehr Bonbons als Zlatan.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Karina am Ende mehr Bonbons hat als Zlatan, beträgt $\frac{5}{16}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Zlatan am Ende mehr Bonbons hat als Karina, beträgt ebenfalls $\frac{5}{16}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide am Ende gleich viele Bonbons haben, beträgt $\frac{6}{16}$.



Aufgabe 12 – *Fakultät* - 7 Punkte -

Wir betrachten die Primfaktorzerlegung von 200! .
Sie ist eindeutig. Eine 0 am Ende der Zahl 200! entsteht durch die Multiplikation eines Faktors 5 mit einem Faktor 2. Die Anzahl der Faktoren 2 in der Zerlegung ist größer als die Anzahl der Faktoren 5, denn unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 gibt es mehr gerade Zahlen als Vielfache von 5. Daher genügt es, die Faktoren 5 in der Zerlegung zu zählen.
Es gibt 40 Vielfache von 5, die kleiner oder gleich 200 sind, aber die Vielfachen von 25 enthalten zweimal den Faktor 5. Von ihnen gibt es 8 in der Zerlegung.
Zudem gibt es noch die 125, die den Faktor 5 drei Mal enthält.
In der Primfaktorzerlegung von 200! kommt der Faktor 5 also 40 + 8 + 1 = 49 Mal vor. 49 Mal kann eine 5 in der Zerlegung mit einer 2 multipliziert werden.
Das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 200 endet auf 49 Nullen.

Aufgabe 13 – *Bauplatz gesucht*!
- 10 Punkte

Grundstück **1** hat die Fläche 12m · 28m = 336m². Es ist zu klein.

Grundstück **2:**
Die beiden Grundstücke ganz links sind zusammen (615m² + 519m²) : 27m = 42m breit.
Die Breite des gesamten Bauplatzes links der Straße beträgt also 42m + 10m = 52m.
Das Grundstück der Fläche 644m² ist 23m breit (644 m² : 28m), Grundstück **1** ist 12m breit, und damit ist Grundstück **2** 52m – 12m – 23m = 17m breit. Sein Flächeninhalt beträgt 476m².
Grundstück **2** ist also auch zu klein.

Sei x die Länge [in m] und A die Fläche [in m²] von Grundstück **3**.
Dann gilt

$$\begin{cases} A+720 = 40x \\ \dfrac{A+420}{x} = \dfrac{600}{20} \end{cases} \quad -> \quad \begin{cases} A+720 = 40x \\ A+420 = 30x \end{cases}$$

Subtrahiert man die Gleichungen, erhält man
$300 = 10\,x$, also $x = 30\ m$ und $A = 480$ m².
Grundstück **3** ist also auch zu klein.

In der Siedlung gibt es für Mehdi kein passendes Grundstück mehr.