Mathematik ohne Grenzen – Hauptwettbewerb 2015
Lösungshinweise

Aufgabe 1 – *Les polygones d'Antigone* – 7 Punkte

Ist n die Anzahl der Ecken und d die Anzahl der Diagonalen des Vielecks, so erhält man:
$n = 6, d = 9$; $n = 7, d = 14$; $n = 8, d = 20$.
Herleitung der Formel: Verbindet man einen Eckpunkt des n-Ecks mit den n-1 übrigen Eckpunkten, so sind zwei dieser Verbindungen Seiten und die übrigen n-3 Verbindungen Diagonalen.
Da jede Diagonale zwei Eckpunkte enthält, erhält man insgesamt $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen.
Die Anzahl der Diagonalen nimmt mit der Anzahl der Ecken zu. Durch gezieltes Probieren erhält man bei einem 15-Eck 90 und bei einem 16-Eck 104 Diagonalen. Ein Vieleck mit 100 Diagonalen gibt es deshalb nicht.

Aufgabe 2 – *Je länger je lieber* – 5 Punkte

Viele Startzahlen lassen sich sehr schnell ausschließen, so z.B. einstellige Zahlen, Vielfache von 10 oder Zahlen mit der Ziffer 1.
Vertauscht man die Ziffern der Startzahl, so hat dies keinen Einfluss auf den Rest der Folge.
Man findet als Lösung **77**, 49, 36, 18, 8.
Im Grunde genügt es sogar, sich bei der Suche auf die Vielfachen von 11 zu beschränken, da die Fragestellung eine eindeutige Lösung nahe legt.

Aufgabe 3 – *Auf Achse* – 7 Punkte

Bei einer Umdrehung legen die Räder auf dem Boden eine Strecke von 50π cm zurück, das Brett bewegt sich relativ zu den Radachsen um eine Strecke von 10π cm.
Relativ zum Boden summieren sich die beiden Strecken, so dass sich das Brett um **60π cm** oder rund **188,5 cm** in horizontaler Richtung bewegt.

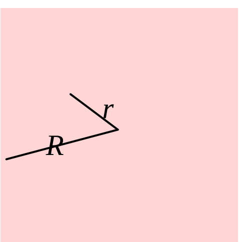
Aufgabe 4 – *Tetrathlon* – 5 Punkte

Das Problem lässt sich auf verschiedene Arten mit einer Tabelle lösen. Hier zwei mögliche Lösungen in zwei verschiedenen Darstellungen für die acht Mannschaften A, B, C, D, E, F, G, H:

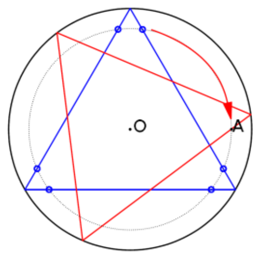
	Volleyball	Fußball	Handball	Basketball
1	A - B	A - C	A - D	A - E
2	C - D	E - G	C - E	C - F
3	E - F	F - B	F - H	B - H
4	G - H	D - H	B - G	D - G

	E	F	G	H
A	**Volleyball**	**Fußball**	**Handball**	**Basketball**
B	**Basketball**	**Volleyball**	**Fußball**	**Handball**
C	**Handball**	**Basketball**	**Volleyball**	**Fußball**
D	**Fußball**	**Handball**	**Basketball**	**Volleyball**

Aufgabe 5 – *Eingekreist* – 7 Punkte



Man zeichnet zunächst ein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen, ohne sich um den Punkt A zu kümmern. Zeichnet man nun einen Kreis um O durch den Punkt A, so schneidet dieser das Dreieck in 6 Punkten. Durch jeden dieser Punkte und den Punkt A ist eine Drehung festgelegt, mit deren Hilfe sich das gezeichnete Dreieck in das gesuchte überführen lässt.

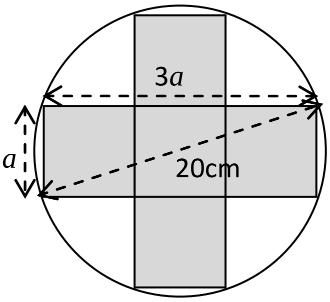


Die Konstruktion ist nur dann durchführbar, wenn der Abstand von A zum Kreismittelpunkt nicht kleiner als der Inkreisradius des Dreiecks ist. Die möglichen Punkte für A liegen also auf einem Kreisring mit R = 6 cm und r = 3 cm.

Aufgabe 6 – *Fünferbande* – 5 Punkte

Ist x die Zeit von Achmed, so beträgt die Zeit von Elisa x + 20 min und die Gesamtzeit 5x + 50 min.
Da Achmed doppelt so schnell wie Elisa läuft, gilt x + 20 min = 2x und damit x = 20 min.
Als Gesamtzeit erhält man **150 min**.

Aufgabe 7 – *Smart box* – 7 Punkte



Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man $a = \sqrt{40}$ cm.
Das Volumen der Schachtel ist $\boldsymbol{a^3 \approx 253\ \mathrm{cm}^3}$

Aufgabe 8 – *Auf und davon* – 5 Punkte

Wenn der erste Fahrer oben angekommen ist, hat der zweite noch 200 m zu fahren, bis er den höchsten Punkt erreicht. Bei einer Geschwindigkeit von 18 km/h benötigt er dazu 40 s. Dieser Zeitvorsprung bleibt erhalten, da beide Fahrer zum Erreichen der konstanten Endgeschwindigkeit die gleiche Zeit benötigen und die gleiche Strecke zurücklegen.
Sobald beide Fahrer die gleiche Endgeschwindigkeit erreicht haben, beträgt ihr Abstand somit

$70 \cdot \frac{40}{3600}$ km $\approx$ **0,778 km = 778 m**.

Aufgabe 9 – *GPS* – 7 Punkte

Man bestimmt den Mittelpunktswinkel α für die Bogenlänge b = 0,1 km und den Radius r = 6367 km:

Aus $0{,}1 = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$ folgt $\alpha \approx 0{,}0009°$.

Das Navigationsgerät würde unter den genannten Bedingungen eine nördliche Breite von
48,7281° – 0,0009° = **48,7272°** anzeigen.

Aufgabe 10 – *Theorie der Sehnen* – 10 Punkte

Beschreibt man dem Einheitskreis ein gleichseitiges Dreieck ein, so beträgt die Seitenlänge $\sqrt{3}$.
Das Produkt zweier Seitenlängen hat den Wert 3.

Beim einbeschriebenen Quadrat haben die Diagonalen die Länge 2 und die Seiten die Länge $\sqrt{2}$.
Das Produkt aus den Längen einer Diagonalen und zweier Seiten hat den Wert 4.

Beim einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck erhält man zwei Sehnen der Länge 1, zwei mit der Länge $\sqrt{3}$ und eine mit der Länge 2. Das Produkt der Sehnenlängen hat den Wert 6.

Vermutung:
Wird dem Einheitskreis ein regelmäßiges Vieleck einbeschrieben, und verbindet man einen Eckpunkt mit den übrigen Eckpunkten durch eine Strecke, so ist der Wert des Produkts aus den Längen dieser Strecken gleich der Anzahl der der Ecken.
Falls diese Vermutung stimmt, hat das Produkt der Sehnenlängen bei einem Chiliagon den Wert 1000.

Klassenstufe 10

Aufgabe 11 – *Seifenblasen* – 5 Punkte

Erste Halbkugel: Radius 6 cm, Volumen V_6.

Vergrößerte Halbkugel: Radius 7 cm, Volumen V_7.

Innere Halbkugel: Radius r, Volumen V_r.

Für die Volumen gilt $V_7 = V_6 + V_r$.

Damit gilt für die Radien $r^3 = 7^3 - 6^3 = 127$ und somit **r** $\approx$ **5,03 cm**

Der Durchmesser der inneren Halbkugel beträgt etwas mehr als 10 cm.

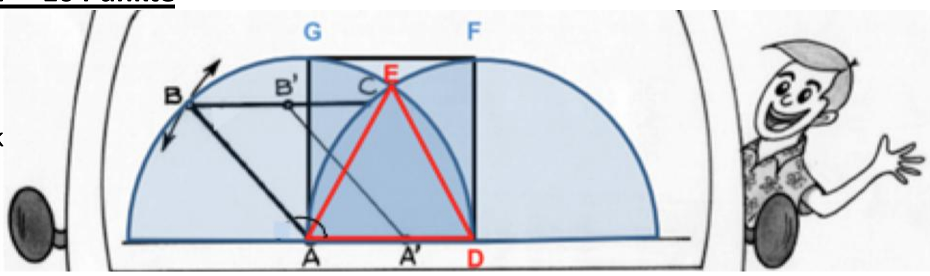
Aufgabe 12 – *Archimedische Fliege* – 7 Punkte

Jede sechseckige Seitenfläche kann in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegt werden deren Inhalt so groß wie der Inhalt der dreieckigen Seitenflächen ist. Die gesamte Oberfläche des Körpers kann also in $4 \cdot 6 + 4 = 28$ kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt werden, wobei $4 \cdot 6 = 24$ Dreiecke auf die sechseckigen Seitenflächen entfallen.

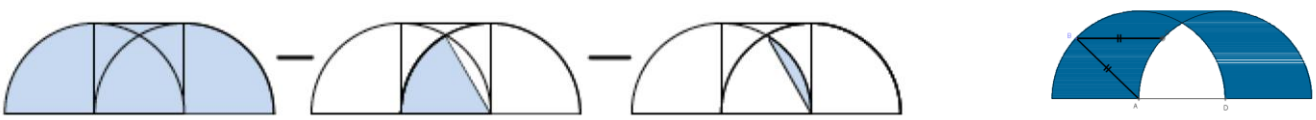
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Fliege auf einem Sechseck landet, beträgt also $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$.

Aufgabe 13 – *Switch switch* – 10 Punkte

Das Viereck ADFG ist ein Quadrat von 0,7 m Seitenlänge. Das Dreieck ADE ist gleichseitig



Die nachfolgenden Zeichnungen veranschaulichen die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts:



$$0{,}5 \cdot \pi \cdot 0{,}7^2 + 0{,}7^2 \quad - \quad \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 0{,}7^2 \quad - \left[\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 0{,}7^2 - \frac{0{,}7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}7}{2} \right] \; = \; 0{,}7^2 \cdot \left[\frac{\pi}{6} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] \approx \mathbf{0{,}9587}$$

Der Inhalt der vom Wischerblatt überstrichenen Fläche beträgt rund 1 m².
Der Konstruktionsvorschlag wird verworfen, weil in der Mitte der Windschutzscheibe ein großer Flächenteil nicht vom Wischerblatt erreicht wird.