ACADEMIE DE STRASBOURG

Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangsstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

14. März 2000

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

- ***Für die Aufgaben 4, 8 und 9 ist keine Erklärung notwendig. Bei allen anderen Aufgaben muss die Lösung begründet werden.***
- ***Die Darstellung wird mitbewertet.***
- ***Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.***

Aufgabe 1 – 10 Punkte – SCHACH DEM DOMINO

Die Lösung dieser Aufgabe muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

On enlève deux cases noires situées aux coins opposés d'un échiquier, comme sur la figure ci-contre.
On pose 30 dominos sur les cases restantes. Chaque domino recouvre exactement deux cases. Il reste alors deux cases non recouvertes.

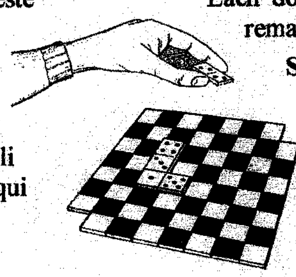
Ces cases sont-elles de la même couleur? Justifier la réponse.

Si tolgono due caselle nere situate negli angoli opposti di una scacchiera, come nella figura qui sotto. Si pongono 30 domino sulle caselle restanti.
Ogni domino copre esattamente due caselle. Rimangono due caselle scoperte.

Queste caselle sono dello stesso colore? Giustificare la risposta.

Two black squares are removed from opposite corners of a chessboard. See diagram.
30 dominoes are then laid on the remaining squares. Each domino occupies exactly two squares. So two remaining squares are uncovered.

Say whether or not these squares are the same colour? Justify your answer.



En un tablero, se quitan dos casillas negras en los rincones opuestos, como se indica en la figura. Se colocan 30 fichas de dominó en las casillas restantes: cada dominó cubre exactamente dos casillas. Entonces quedan dos casillas sin cubrir.

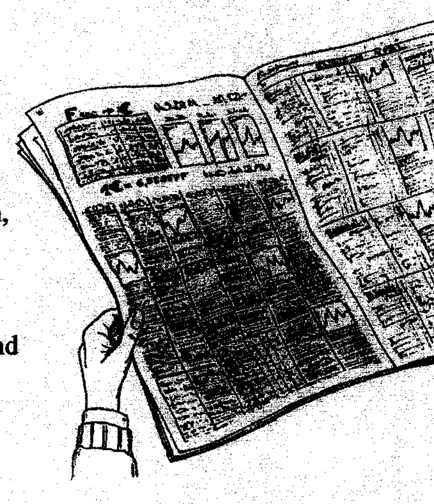
¿Son del mismo color estas 2 casillas? Justifica tu respuesta.

Aufgabe 2 – 5 Punkte – RUNDER EURO

Der Kurs des Euro wurde so festgelegt, dass 1 Euro 1,95583 DM entspricht. Um die Summe mehrerer Beträge von DM in Euro umzurechnen, hat man zwei Möglichkeiten:

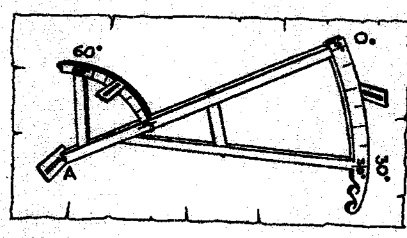
- Man rechnet den Gesamtbetrag in Euro um und rundet dann auf zwei Dezimalen.
- Man rechnet die Einzelbeträge in Euro um, rundet auf zwei Dezimalen und addiert die gerundeten Beträge.

Zeige an einem Beispiel, dass die beiden Methoden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können.



Aufgabe 3 – 10 Punkte
Quadrant von Davis

Um das Jahr 1590 entwickelte John Davis, ein englischer Seemann, ein Navigationsgerät, das unter seinem Namen bekannt wurde: den Quadranten von Davis. Damit war es möglich, den Erhebungswinkel der Sonne über dem Horizont zu bestimmen, ohne in die Sonne sehen zu müssen. Dies war ein solcher Fortschritt, dass das Gerät bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts Verwendung fand.



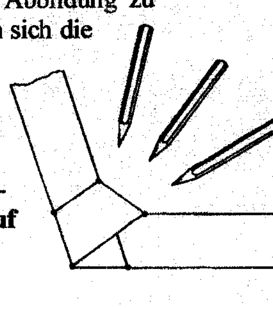
Das Gerät bestand aus einer Leiste, auf der zwei Kreisbögen mit dem Mittelpunkt A befestigt waren. Der obere Kreisbogen trug eine Einteilung von 0° bis 60°, der untere war von 0° bis 30° unterteilt. Auf beiden Bogenstücken war jeweils ein verschiebbarer Spalt angebracht. Im Zentrum A der beiden Kreisbögen befand sich ein weiterer Spalt.

Bei der Messung wandte der Navigator der Sonne den Rücken zu und hielt das Instrument in einer vertikalen Ebene. Das Gerät wurde so eingestellt, dass das Sonnenlicht durch den Spalt auf dem oberen Bogen auf den Spalt bei A fiel. Gleichzeitig wurde durch den Spalt auf dem unteren Bogen und den Spalt bei A der Horizont anvisiert.

Zeichne den Navigator bei der Messung.
Erkläre, wie man aus den Einstellungen des Geräts den Erhebungswinkel erhält.

Aufgabe 4 – 5 Punkte
Farbknoten

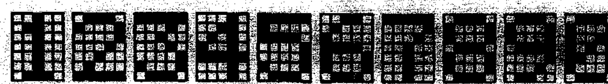
Falte aus einem 4 cm breiten Papierstreifen einen Knoten, wie er auf der Abbildung zu sehen ist. In der Form des Knotens lassen sich die Eckpunkte eines Fünfecks erkennen.



Färbe das Fünfeck so, dass genau die Bereiche gleich gefärbt sind, bei denen die Anzahl der übereinander liegenden Papierschichten übereinstimmt. Klebe den farbigen Knoten auf das Antwortblatt!

Aufgabe 5 – 10 Punkte
Pixel

Wenn mein alter Rechner die Zahl 1 234 567 890 auf dem Bildschirm anzeigt, so erfolgt die Darstellung durch das Aufleuchten bestimmter Pixel (siehe Abbildung). Zur Anzeige der Zahl 0 leuchten 19 Pixel auf, für die Zahl 17 benötigt man 21 Pixel. Eine ganze Zahl beginnt nicht mit der Ziffer 0.

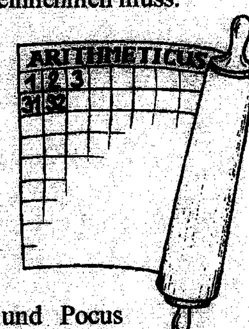


Finde eine Zahl, bei der die Anzahl der notwendigen Pixel mit dem Wert der Zahl übereinstimmt.
Ist es die einzige Zahl? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 6 – 5 Punkte
Fünfte Kolonne

Wenn es um die Ordnung geht, versteht man in der römischen Armee keinen Spaß. Jeder Legionär hat eine feste Nummer, damit er genau weiß, welchen Platz er innerhalb der Formation einnehmen muss.

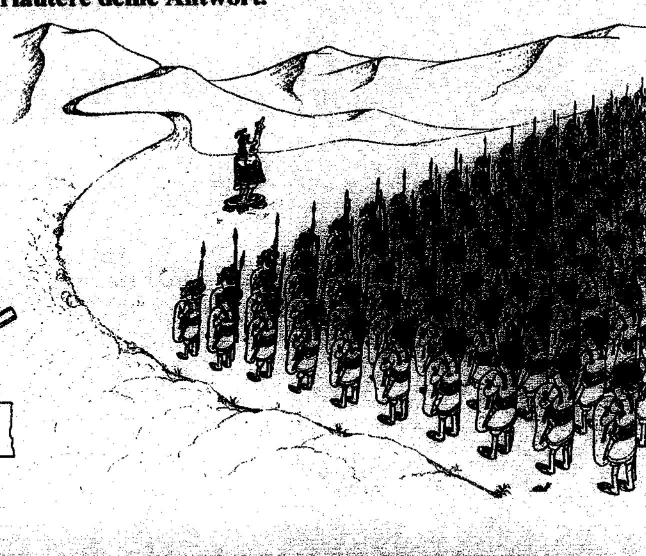
Lässt General Arithmeticus seine 990 Legionäre antreten, so stellen sie sich in einer rechteckigen Formation von 33 Linien und 30 Kolonnen auf. Jede Linie wird dabei in aufsteigender Reihenfolge aufgefüllt, so wie es auf der Schriftrolle zu sehen ist.



Die beiden Legionäre Hocus und Pocus stehen in der fünften Kolonne, aber keiner steht in der ersten Linie.

Als Arithmeticus nach Rom gerufen wird, übernimmt General Calculus das Kommando. Er verlangt, dass sich die Legionäre wieder in aufsteigender Reihenfolge, nun aber in einem Rechteck mit 30 Linien und 33 Kolonnen aufstellen. Hocus und Pocus stehen wieder in der fünften Kolonne.

Welche Nummern tragen die beiden Legionäre? Erläutere deine Antwort.



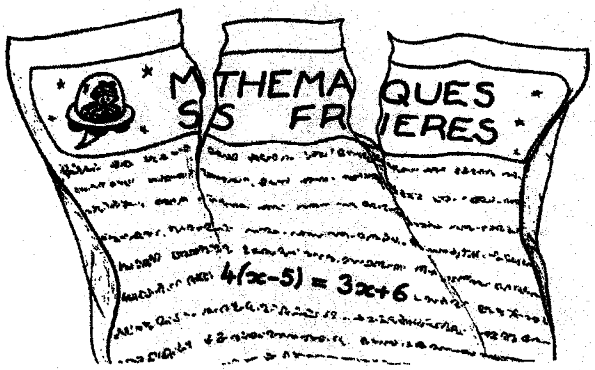
Aufgabe 7 – 10 Punkte
Zurück in die Zukunft

Im Jahr 20000 findet ein Archäologe ein Relikt in sehr schlechtem Zustand, dessen Konsistenz früher als Papier bezeichnet wurde. Es gelingt ihm, die Buchstaben "M...THEMA...QUES S...S FR...IERES" zu entziffern. Darunter folgt ein Text von etwa zehn unleserlichen Zeilen, dann eine Gleichung:

$$4(x-5)=3x+6.$$

Nach Hinzuziehen eines Sachverständigen wird klar, dass es sich bei dem Text um eine Aufgabe eines berühmten Mathematikwettbewerbs und deren Lösung handelt.

Schreibe einen Text auf, der in 18000 Jahren gefunden werden soll. Erfinde dazu eine Aufgabe und stelle ihre Lösung dar. Die Lösung soll die oben erwähnte Gleichung enthalten.



Aufgabe 8 – 5 Punkte
Namenloses Polyeder

Pierre: „Ich habe einen Körper mit sechs Seitenflächen gebastelt."

Jean: „Bestimmt ist es ein Würfel! Er hat sechs Seitenflächen und acht Eckpunkte."

Pierre: „Nein, nein! Mein Körper hat nur fünf Eckpunkte, jedoch neun Kanten."

Jean: „Aber dann können die Seitenflächen nicht quadratisch sein."

Pierre: „Natürlich nicht, es sind lauter gleichseitige Dreiecke."

Jean: „Dann kann auch ich den Körper bauen!"

Zeichne ein Netz und skizziere ein Schrägbild dieses Körpers. Wie könnte man ihn nennen?

Aufgabe 9 – 10 Punkte
Krummes Ding

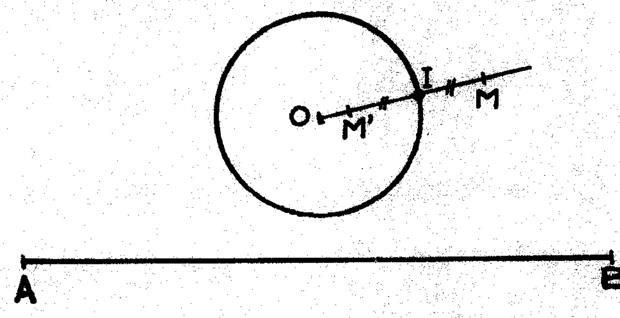
Gegeben sei die Kreislinie K mit dem Radius r und dem Mittelpunkt O. Den zu einem Punkt $M \neq O$ symmetrischen Punkt M' in bezug auf die Kreislinie K erhält man nach folgender Vorschrift:

- Man zeichne die Halbgerade [OM). Sie schneide K im Punkt I.
- Den Bildpunkt M' erhält man durch Spiegelung von M an I.

Konstruiere punktweise das Bild der Strecke AB in bezug auf die Kreislinie K.

Verwende folgende Maße:

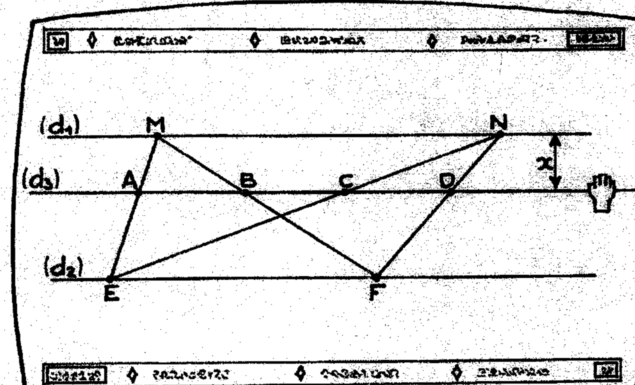
$\overline{AB} = 22$ cm; $\overline{OA} = \overline{OB} = 11{,}5$ cm; $r = 2{,}5$ cm.



Aufgabe 10 – 15 Punkte
Geometrie beweglich

Mit einem Geometrieprogramm hat Hans-Jürgen die abgebildete Figur mit den Parallelen (d_1), (d_2) und (d_3) konstruiert. (d_1) und (d_2) haben einen Abstand von 1dm. Als er (d_3) zwischen (d_1) und (d_2) parallel verschiebt, stellt er fest, dass die vom Computer angezeigten Längen der Strecken AB und CD stets gleich sind. Da die angezeigten Längen jedoch gerundet sind, hat er Zweifel.

Zeige, dass die Strecken AB und CD wirklich gleich lang sind, in welcher Position zwischen den beiden anderen Geraden sich (d_3) auch befindet.



nur für Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Es hat Durchfahrt...

Auf einem 340 m langen Bahnsteig wartet Hansi auf seinen Anschluss und denkt nach:

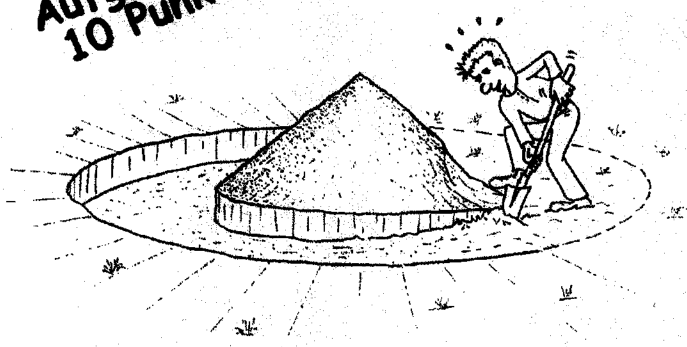
„Angenommen, der eben durchfahrende Zug benötigt genau sechs Sekunden, um mit gleichbleibender Geschwindigkeit an mir vorbei zu fahren. – Und angenommen, zwischen dem Zeitpunkt, an dem die Lokomotive den Anfang des Bahnsteigs erreicht, und dem Zeitpunkt, an dem das Schlusslicht des letzten Wagens das Ende des Bahnsteigs passiert, liegen genau 23 Sekunden:

Wie lang ist dann dieser Zug, wie schnell fährt er?"

Berechne die Geschwindigkeit und die Länge des Zuges!

Aufgabe 12
10 Punkte

Kind und Kegel



Um einen Sandhaufen aufzuschütten, hat Albert einen ringförmigen Graben mit senkrechten Wänden ausgehoben. Der Außenradius des Ringes ist doppelt so groß wie der Innenradius. Mit dem ausgehobenen Sand formt er einen senkrechten Kreiskegel, dessen Grundfläche vom Innenrand des Grabens begrenzt wird.

„Warte einen Augenblick!" ruft plötzlich Alberts Vater. „Wenn du dich aufrecht in den Graben stellst, ist die Kegelspitze genau so hoch wie der höchste Punkt deines Kopfes."

In diesem Moment ist der Graben überall 15 cm tief.

Wie groß ist Albert? Begründe deine Antwort.

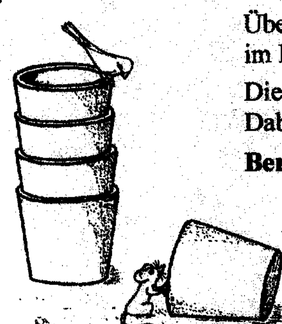
Aufgabe 13
15 Punkte

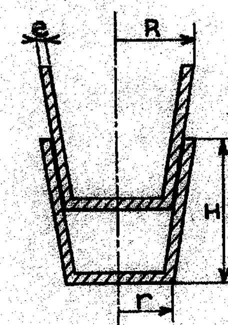
Hochstapelei

Über den Winter werden 10 gleiche, leere Blumentöpfe wie im Bild gestapelt.

Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch zwei dieser Töpfe. Dabei ist R = 9 cm, r = 5 cm, H = 18 cm und e = 0,5 cm.

Berechne die genaue Höhe des Stapels aus zehn Töpfen.





zu Mathematik ohne Grenzen: Übersicht 1